Lezione del 18.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Esempio introduttivo.
Nel piano, fissato un punto O ed una unità di misura. Per ciascun vettore $\mathbf{v}$ applicato in O consideriamo il vettore $\mathbf{v}'$ applicato in O tale che l'angolo da $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v}'$ sia $\pi/4(=45)$ in senso antiorario. Abbiamo così una funzione dall'insieme $\mathcal{V}_o^2$ in sè stesso. Indicata con f questa funzione, scriviamo $f:\mathcal{V}_o^2\to\mathcal{V}_o^2$ e $f:\mathbf{v}\mapsto\mathbf{v}'$ (f manda $\mathbf{v}$ in $\mathbf{v}'$) oppure $f(\mathbf{v})=\mathbf{v}'$ (f di $\mathbf{v}$ uguale a $\mathbf{v}'$).

Dal fatto che f conserva lunghezze di vettori ed angoli fra vettori segue in particolare che f è compatibile con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, nel senso che

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) \qquad \text{per ogni } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}_o^2$$
$$f(\alpha\mathbf{v})=\alpha f(\mathbf{v}) \qquad \text{per ogni } \alpha\in\mathbb{R},\mathbf{v}\in\mathcal{V}_o^2$$

Da ciò segue in particolare che f si comporta bene sulle combinazioni lineari:

$$f(x\mathbf{u}+y\mathbf{v})=f(x\mathbf{u})+f(y\mathbf{v})=xf(\mathbf{u})+yf(\mathbf{v})$$

per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ e $\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}_o^2$.

Siano $\mathbf{i},\mathbf{j}$ due versori applicati in O tali che l'angolo da $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ sia $\pi/2$ in senso antiorario (una particolare base ortonormale di $\mathcal{V}_o^2$). Allora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{i}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j} \\ f(\mathbf{j}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Ogni vettore di $\mathcal{V}_o^2$ si scrive come combinazione lineare di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, e per la comatibilità di f con le operazioni si ha

$$\begin{aligned} f(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}) &= xf(\mathbf{i})+yf(\mathbf{j}) \\ &= x(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j})+y(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{j}) \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y)\mathbf{i}+(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Identificati i vettori di $\mathcal{V}_o^2$ con le coppie ordinate delle loro coordinate in $\mathbb{R}^2$, l'applicazione $f:\mathcal{V}_o^2\to\mathcal{V}_o^2$ viene identificata con l'applicazione $\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ data da

$$\bar{f}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{\sqrt{2}}{2}y \\ \frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y \end{bmatrix}$$

Applicazioni lineari.

Definizione. Un'applicazione $f:\mathcal{V}\to\mathcal{W}$ da uno spazio vettoriale $\mathcal{V}$ ad uno spazio vettoriale $\mathcal{W}$ si dice "applicazione lineare" se f è compatibile con le operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, nel senso che

$$f(\mathbf{u}+\mathbf{v})=f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}) \qquad \text{per ogni } \mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathcal{V}$$
$$f(\alpha\mathbf{v})=\alpha f(\mathbf{v}) \qquad \text{per ogni } \alpha\in\mathbb{R},\mathbf{v}\in\mathcal{V}$$

Da ciò segue in particolare che f si comporta bene sulle combinazioni lineari:

$$f(x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + x_2 f(\mathbf{v}_2) + \cdots + x_n f(\mathbf{v}_n)$$

per ogni $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$.

La rotazione di $\pi/4$ di vettori geometrici $f : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ e la sua traduzione fra vettori numerici $\bar{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono esempi di applicazioni lineari.

Applicazioni lineari fra spazi vettoriali numerici.

Problema. Descrivere le applicazioni lineari $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, per ogni m, n interi positivi.

Caso $m = n = 1$; esempi.
(1) L'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$, è lineare, in quanto:
da una parte $f(u+v) = 2(u+v)$, dall'altra $f(u)+f(v) = 2u+2v$, e dunque $f(u+v) = f(u) + f(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}$;
da una parte $f(\alpha u) = 2(\alpha u)$, dall'altra $\alpha f(u) = \alpha(2u)$, e dunque $f(\alpha u) = \alpha f(u)$ per ogni $\alpha, u \in \mathbb{R}$;
(2) L'applicazione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$, non è lineare, in quanto:
da una parte $g(u+v) = u+v+1$, dall'altra $g(u)+g(v) = u+1+v+1$, e dunque non è vero che $g(u+v) = g(u) + g(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ (anzi, non è mai vero).
(3) L'applicazione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$, non è lineare, in quanto:
da una parte $h(u+v) = (u+v)^2$, dall'altra $h(u)+h(v) = u^2+v^2$, e dunque non è vero che $h(u+v) = h(u) + h(v)$ per ogni $u, v \in \mathbb{R}$ (è vero solo in un paio di casi).

Fatto. Un'applicazione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lineare se e solo se è data da un monomio di primo grado, eventualmente costante uguale a 0, cioè èdel tipo

$$f(x) = mx, \quad \text{con } m \text{ costante } \in \mathbb{R}.$$

Teorema. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se è data da m polinomi omogenei di primo grado in n variabili (eventualmente costanti uguali a 0), cioè è del tipo

$$f \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_nx_n \\ \vdots \\ \vdots \\ d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n \end{bmatrix}$$

con $a_1, a_2, \ldots, d_n$ costanti in $\mathbb{R}$ (in totale di mn costanti).