

Lezione del 24.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Premessa. Si è visto che un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se è data da una m -pla ordinata di polinomi omogenei di primo grado o nulli in n variabili. Ad esempio, un'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è lineare se e solo se è del tipo

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \\ a_3x + b_3y \end{bmatrix}$$

dove $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ sono costanti in \mathbb{R} . Queste costanti possono essere organizzate nella tabella

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix},$$

e questa tabella caratterizza completamente l'applicazione lineare. Nelle righe compaiono i coefficienti delle variabili nei vari polinomi; nelle colonne compaiono le immagini dei vettori della base canonica di \mathbb{R}^2 :

$$f \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}, \quad f \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

La relazione fra applicazioni lineari e tabelle, o matrici, è più profonda, come si mostra di seguito.

Vettori riga, vettori colonna, ennuple ordinate. Una sequenza di n numeri reali a_1, \dots, a_n può essere rappresentata come un vettore riga ad n componenti, un vettore colonna ad n componenti, oppure (primariamente) come una n -pla ordinata:

$$\left[a_1 \quad \dots \quad a_n \right], \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad (a_1, \dots, a_n);$$

il vettore riga ed il vettore colonna si dicono l'uno il "trasposto" dell'altro e il vettore colonna si identifica con la n -pla ordinata, si pone

$$\left[a_1 \quad \dots \quad a_n \right]^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = \left[a_1 \quad \dots \quad a_n \right], \quad \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (a_1, \dots, a_n).$$

Si indicano con $\mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbb{R}^{n \times 1}$, \mathbb{R}^n , rispettivamente gli insiemi dei vettori riga ad n componenti, dei vettori colonna ad n componenti, e delle n -ple ordinate. Questi insiemi, con le operazioni definite componente per componente, sono spazi vettoriali; l'applicazione di trasposizione $\mathbb{R}^{1 \times n} \leftrightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ e l'identificazione $\mathbb{R}^{n \times 1} \simeq \mathbb{R}^n$ sono compatibili con le operazioni vettoriali (sono lineari) e biettive.

Prodotto righe per colonne Si definisce il prodotto di un vettore riga per un vettore colonna, aventi lo stesso numero di componenti, come il numero reale ottenuto moltiplicando ciascuna componente del primo vettore per la corrispondente componente del

secondo e poi sommando. La moltiplicazione di una riga per una colonna aventi diversi numeri di componenti non viene definita. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 7 = 56$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{non definito}$$

In generale, il prodotto di un vettore riga $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ per un vettore colonna $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ è dato da

$$\mathbf{ab} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

ed è legato al prodotto scalare, essendo

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{b}.$$

Il prodotto di vettori riga per vettori colonna è legato alle operazioni sui vettori riga e sui vettori colonna dalle seguenti proprietà.

Per ogni due vettori riga $\mathbf{a}, \mathbf{a}' \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, ogni due vettori colonna $\mathbf{b}, \mathbf{b}' \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ed ogni scalare $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{a}')\mathbf{b} &= \mathbf{ab} + \mathbf{a}'\mathbf{b}; \\ \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{b}') &= \mathbf{ab} + \mathbf{ab}'; \\ (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b} &= \mathbf{a}(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{ab}) \end{aligned}$$

Matrici Siano m ed n due interi positivi fissati. Una matrice di tipo $m \times n$ su \mathbb{R} è una tabella di $m \cdot n$ numeri reali disposti su m righe ed n colonne; l'elemento della i -ma riga e j -ma colonna di una matrice si dice in breve "elemento di posto (i, j) " della matrice. Le matrici di solito vengono indicate con lettere maiuscole; per indicare che una matrice A ha tipo $m \times n$ si usa scrivere $A_{m \times n}$. L'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ su \mathbb{R} si indica con

$$\mathbb{R}^{m \times n}.$$

La generica matrice A di tipo $m \times n$ viene solitamente rappresentata

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

oppure, piu' brevemente,

$$A = [a_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}},$$

o $A = [a_{ij}]$ quando il tipo è chiaro dal contesto. Si noti che i e j non hanno alcun particolare significato, potrebbero essere sostituiti da altri due simboli, come h e k .

Noi useremo talvolta una notazione un po' diversa, suggerita dai linguaggi di alcune applicazioni per il calcolo come Matlab e Octave. Una volta scelto un simbolo, nel nostro caso A , per indicare una matrice, useremo il simbolo A_{ij} per indicare l'elemento di posto (i, j) in A ; inoltre, useremo i simboli $A_{i:}$ e $A_{:j}$ per indicare rispettivamente la riga i -ma e la colonna j -ma di A .

Ad esempio, per

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$A_{23} = 7, \quad A_{2:} = [5 \quad 6 \quad 7 \quad 8], \quad A_{:3} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Prodotto di matrici Se il numero delle colonne di una matrice A è uguale al numero delle righe di una matrice B , allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B , ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo così una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B , ed indicata con AB . Se il numero delle colonne di una matrice A non è uguale al numero delle righe di una matrice B , allora il prodotto AB non è definito.

Ad esempio, si ha

$$\begin{bmatrix} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \\ 5 \cdot 1 + 6 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 6 \cdot 5 & 5 \cdot 3 + 6 \cdot 6 \\ 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4 & 7 \cdot 2 + 8 \cdot 5 & 7 \cdot 3 + 8 \cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{bmatrix}$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ è la matrice AB di tipo $m \times p$ data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i, j) in AB è dato dal prodotto della riga i -ma di A per la colonna j -ma di B :

$$(AB)_{ij} = A_{i:} B_{:j}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, p.$$

Con riferimento agli elementi, si ha

$$\begin{aligned}(AB)_{ij} &= A_i \cdot B_{\cdot j} \\ &= [A_{i1} \ A_{i2} \ \dots \ A_{in}] \begin{bmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{bmatrix} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}.\end{aligned}$$

Nella notazione usuale, la definizione di prodotto è la seguente: per $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$ e $B = [b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$ si pone $AB = C$, dove $C = [c_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,p}}$ è data da

$$c_{ij} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \dots + a_{i,n}b_{n,j}.$$

La moltiplicazione di matrici estende la moltiplicazione dei numeri reali, nel senso che le matrici di tipo $1 \cdot 1$ sono numeri reali, e la moltiplicazione di matrici di tipo $1 \cdot 1$ è la moltiplicazione di numeri reali.

Matrici unità. Le matrici quadrate che hanno 1 sulla diagonale discendente e 0 altrove svolgono il ruolo del numero 1, e per questa ragione vengono dette “matrici unità”. Esplicitamente, queste matrici sono

$$I_1 = [1], \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \dots;$$

la matrice I_n unità di ordine n è la matrice quadrata di ordine n data da

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

La proprietà di queste matrici è che

$$I_m A = A = A I_n,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Verifichiamo la prima parte di questa proprietà per $m = 2$ e $n = 3$. Per ogni matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

di tipo 2×3 si ha

$$\begin{aligned}I_2 A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1a + 0d & 1b + 0e & 1c + 0f \\ 0a + 1d & 0b + 1e & 0c + 1f \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = A.\end{aligned}$$

Associatività Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sarà di tipo $m \times q$:

$$(AB)C, \quad A(BC).$$

Ad esempio, per le matrici $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $[1 \ 2]$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, si ha

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 2] \right) \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left([1 \ 2] \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [11] = \begin{bmatrix} 11 \\ 22 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi.

Non commutatività Sappiamo che il prodotto di due numeri reali non cambia invertendo l'ordine dei fattori, cioè la moltiplicazione di numeri reali possiede la proprietà commutativa. Questa proprietà non vale per la moltiplicazione di matrici, anzi in generale ci si aspetta che

$$AB \neq BA.$$

Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [1 \ 2] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \text{ma} \quad [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ non è definito.}$$

Applicazioni lineari e matrici. La generica applicazione lineare $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ si può rappresentare nella forma

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + b_1y \\ a_2x + b_2y \\ a_3x + b_3y \end{bmatrix}$$

dove $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ sono costanti in \mathbb{R} e in base alla definizione di prodotto di matrici, nella forma

$$f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

e quindi in breve

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

con A matrice costante di tipo 3×2 . In generale, si ha

Teorema. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se è del tipo

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

dove A è una matrice $m \times n$ costante, la matrice che ha come colonne le immagini $f(\mathbf{e}_1), \dots, f(\mathbf{e}_n)$ dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ della base canonica di \mathbb{R}^n .

Questa caratterizzazione delle applicazioni lineari in termini di matrici si può vedere come la traduzione della caratterizzazione delle applicazioni lineari in termini di polinomi omogenei di primo grado resa possibile dalla definizione di prodotto di matrici. Una parte di questa caratterizzazione si può vedere anche direttamente come segue.

Sia A una matrice di tipo $m \times n$; allora A si può moltiplicare a destra per ciascun vettore colonna \mathbf{x} di tipo $n \times 1$ ed il prodotto $A\mathbf{x}$ è definito ed è un vettore colonna di tipo $m \times 1$. Per l'identificazione fra vettori colonna e sequenze ordinate, si ha così una applicazione

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}.$$

Dalle proprietà del prodotto di vettori righe per vettori colonna rispetto alle operazioni vettoriali segue che per ogni \mathbf{u}, \mathbf{v} in \mathbb{R}^n ed ogni α in \mathbb{R} si ha

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}; \quad A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(A\mathbf{v}),$$

cioè f è lineare.