Lezione del 25.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Nozioni sulle funzioni.(Richiami) Una funzione da un dato insieme dominio ad un dato insieme codominio è una legge che a ciascun elemento del dominio associa uno ed un solo elemento immagine nel codominio, Si scrive $f : A \to B$ per intendere che f è una funzione di dominio A e codominio B; per ciascun elemento x in A ed elemento x' in B, si scrive $f : x \mapsto x'$ o $f(x) = x'$ per intendere che f a x associa x' cioè che l'immagine tramite f di x è x'. Si dice che due funzioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$ sono uguali e si scrive $f = g$ se e solo se $A = C$, $B = D$ e $f(x) = g(x)$ per ogni x in A.
Per ogni insieme A, la funzione $\mathrm{id}_A : A \to A$ definita da $\mathrm{id}_A(x) = x$ per ogni x in A si dice funzione identità su A.
Siano date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ in modo che il codominio della prima coincida col dominio della seconda. Associando a ciascun x in A la sua immagine $f(x)$ in B ed associando ad $f(x)$ la sua immagine $g(f(x))$ in C si ottiene una funzione dal dominio A a codominio C. Questa funzione si dice dice funzione composta g dopo f, concatenazione di g dopo f, o g composto f e si indica con $g \circ f$. Sinteticamente:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in A.$$

Le funzioni identità sono elementi neutri rispetto alla composizione, nel senso che per ogni funzionoe $f : A \to B$ si ha

$$\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A.$$

La composizione di funzioni è un'operazione (parziale) associativa e non commutativa.
Una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva se e solo se ciascun elemento di B è l'immagine di uno ed un solo elemnto di A, in altri termini per ogni $b \in B$ esiste uno ed un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$.

Applicazioni lineari di $\mathcal{V}_O^n \simeq \mathbb{R}^n$ in sè $(n = 1, 2, 3)$. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_O^3$; identifichiamo ciascun vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ in $\mathcal{V}_O^3$ con il vettore delle sue coordinate (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$ e consistentemente identifichiamo ciascuna applicazione

$$\mathcal{V}_O^3 \to \mathcal{V}_O^3, \quad x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \mapsto x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

con l'applicazione

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x', y', z').$$

Le applicazioni lineari di $\mathcal{V}_O^3$ in sè stesso vengono identificate esattamente con le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sè stesso. Queste applicazioni sono esattamente le applicazioni tali che

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z \end{cases}$$

con $a_1, a_2, \ldots, c_3$ costanti in $\mathbb{R}$. La matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

ha come colonne le coordinate delle immagini dei vettori della base di $\mathcal{V}_O^3$, cioè le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Analogamente per le applicazioni lineari di $\mathcal{V}_O^2 \simeq \mathbb{R}^2$ in sè (e di $\mathcal{V}_O^1 \simeq \mathbb{R}$ in sè).

Esempio. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_O^3$; tramite questa base identifichiamo $\mathcal{V}_O^3$ con $\mathbb{R}^3$ e le applicazioni lineari di $\mathcal{V}_O^3$ in sè stesso con le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3$ in sè stesso.
Sia $R_3 : \mathcal{V}_O^3 \simeq \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V}_O^3 \simeq \mathbb{R}^3$ la rotazione attorno all'asse di $\mathbf{k}$ di $\pi/4$ nel verso da $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$.
Questa applicazione è lineare e

$$\begin{aligned} R_3(\mathbf{i}) &= \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \\ R_3(\mathbf{j}) &= -\frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \\ R_3(\mathbf{k}) &= \mathbf{k} \end{aligned}$$

Dunque la matrice associata ad R_3 è

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e $R_3 : (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$ dove

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} \\ y' = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ z' = z \end{cases} .$$

Composizione di applicazioni lineari.

Proposizione. Siano date due applicazioni

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p.$$

(1) Se F e G son lineari, allora anche $G \circ F$ è lineare.
(2) Se

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}) &= A\mathbf{x}, \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (A \in \mathbb{R}^{m\times n}) \\ G(\mathbf{x}) &= B\mathbf{x}, \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \quad (B \in \mathbb{R}^{p\times m}) \end{aligned}$$

allora

$$(G \circ F)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}, \quad \text{per ogni } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Infatti: per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} (G \circ F)(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= G\left(F(\mathbf{u} + \mathbf{v})\right) \\ &= G\left(F(\mathbf{u}) + F(\mathbf{v})\right) && (\text{ per linearità di } F) \\ &= G\left(F(\mathbf{u})\right) + G\left(F(\mathbf{v})\right) && (\text{ per linearità di } G) \\ &= (G \circ F)(\mathbf{u}) + (G \circ F)(\mathbf{v}), \end{aligned}$$

e in modo simile si verifica che per ogni $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(G \circ F)(\alpha\mathbf{v}) = \alpha(G \circ F)(\mathbf{v}).$$

Inoltre, per ogni $\mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^n$ si ha

$$(G \circ F)(\mathbf{x}) = G(F(\mathbf{x})) = G(A\mathbf{x}) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}.$$

Esempio. Stesso contesto dell'esempio precedente. Consideriamo le seguenti applicazioni $\mathcal{V}_O^3 \simeq \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V}_O^3 \simeq \mathbb{R}^3$:
R_1, rotazione attorno all'asse di $\mathbf{i}$ di $\pi/4$ nel verso da $\mathbf{j}$ a $\mathbf{k}$;
R_2, rotazione attorno all'asse di $\mathbf{j}$ di $\pi/4$ nel verso da $\mathbf{k}$ a $\mathbf{i}$,
R_3, rotazione attorno all'asse di $\mathbf{k}$ di $\pi/4$ nel verso da $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$.
Queste applicazioni sono lineari, inoltre

$$R_1 \ \text{è rappresentata dalla matrice} \ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R_2 \ \text{è rappresentata dalla matrice} \ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R_3 \ \text{è rappresentata dalla matrice} \ \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(si verifichino la prime due affermazioni). Dunque tutte le applicazioni ottenute da R_1, R_2, R_3 per composizione sono lineari. In particolare, $R_2 \circ R_3$ è lineare ed è rappresentata dalla matrice

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Quindi $R_2 \circ R_3 : (x, y, z) \mapsto (x', y', z')$, con

$$\begin{cases} x' = & \frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{\sqrt{2}} \\ y' = & \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ z' = & -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Applicazioni lineari biiettive.

Esempio (discusso graficamente). Sia $L : \mathcal{V}_O^2 \to \mathcal{V}_O^2$ un'applicazione lineare, siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ i vettori di una base di $\mathcal{V}_O^2$ e siano $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ le loro immagini. Osserviamo che:
(1) se $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ sono linearmente indipendenti, allora ciascun vettore $\mathbf{v}' \in \mathcal{V}_O^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come $\mathbf{v}' = x\mathbf{i}' + y\mathbf{j}'$, e da ciò segue che $\mathbf{v}'$ è immagine di uno ed un solo vettore, specificamente di $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
(2) se uno fra $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ è non nullo e l'altro è un suo multiplo scalare, per fissare le idee pensiamo $\mathbf{i}' \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{j}' = \alpha\mathbf{i}'$ per un qualche $\alpha \in \mathbb{R}$, allora i vettori che non stanno sulla retta generata da $\mathbf{i}'$ non sono immagine di alcun vettore, mentre il vettore nullo è l'immagine di almeno due vettori, specificamente $\mathbf{0}$ e $\mathbf{j} - \alpha\mathbf{i}$ (in realtà ciascun vettore che sta sulla retta generata da $\mathbf{i}'$ è immagine di infiniti vettori ...);
(3) se $\mathbf{i}'$ e $\mathbf{j}'$ son entrambi nulli, allora ciascun vettore non nullo non è immagine di alcun vettore, mentre il vettore nullo è l'immagine di tutti i vettori.

In generale, si ha il

Teorema. Per un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) L è biiettiva;
(2) $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), \ldots, L(\mathbf{e}_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$;
(3) $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), \ldots, L(\mathbf{e}_n)$ sono linearmente indipendenti.