Lezione del 25.10. Alcuni esercizi.

(1) Provare, usando solo la definizione, che la seguente applicazione è lineare. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = ax + by$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, dove a, b sono due costanti in $\mathbb{R}$.

(2) (a) Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari, scrivere la matrice ad essa associata

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F(x, y) = (x, y, x + y)$$

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ G \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - z \\ y + z \end{bmatrix}$$

(b) Scrivere l'applicazione lineare associta alla seguente matrice (dominio, codominio, immagine del generico elemento del dominio).

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

(3) Fissata una base ortonormale destrorsa $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_O^3$, si identifichino $\mathcal{V}_o^3$ con $\mathbb{R}^3$ e le applicazioni lineari di $\mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ con le applicazioni lineari di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sia $R : \mathcal{V}_o^3 \simeq \mathbb{R}^3 \to \mathcal{V}_o^3 \simeq \mathbb{R}^3$ la rotazione attorno all'asse di $\mathbf{k}$ di $\pi/4$ nel verso da $\mathbf{j}$ a $\mathbf{i}$. Si determini l'immagine tramite R del vettore $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$.

(4) Si determinino tutti le possibili matrici di tipo 2×1, 3×1, 3×2, 1×2, 1×3, ottenibili come prodotto di due delle matrici seguenti

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(5) Sono date le applicazioni lineari

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ F(x, y) = (x, y, x + y)$$

$$G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ G(x, y, z) = (x + y + z, y + z)$$

Si determini in due modi l'applicazione lineare $G \circ F$, in un modo direttamente e nell'altro rappresentando le applicazioni con matrici.

(6) Per ciascuna delle seguenti applicazioni lineari dire se è biiettiva; in caso negativo scrivere un vettore che non è immagine di uno ed un solo vettore.

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F(x, y) = (x + 3y, 2x + y)$$

$$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ G(x, y) = (4x - 6y, 6x - 9y)$$