Lezione del 31.10. Alcuni argomenti in dettaglio.

Problema. Stabilire se n vettori

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

sono linearmente indipendenti, cioè se l'uguaglianza

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

vale solo per $x_1 = \cdots = x_n = 0$.
Ciò si può fare risolvendo fino a un certo punto il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases},$$

fino al punto in cui si vede se il sistema ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_n = 0$, oppure calcolando un numero, il "determinante" della matrice

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Determinanti di matrici 1×1. Si definisce il determinante dii una matrice di tipo 1×1 come il suo unico elemento:

$$\det[a] = a.$$

Determinanti di matrici 2×2. Si definisce il determinante di una matrice di tipo 2×2 come il prodotto degli elementi sulla diagonale discendente meno il prodotto degli elementi sulla diagonale ascendente:

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Si ha così una funzione $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$.
Posto $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{a}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$, la matrice si scrive in breve

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

e il suo determinante si scrive $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Si ha così una funzione $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Esempi.

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -2;$$
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 = 0,$$
$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

Proposizione. La funzione $\det : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà

1.1 $\det[\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \det[\mathbf{a}', \mathbf{b}]$;

1.2 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}'] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}']$;

2 $\det[\mathbf{a}, \gamma\mathbf{b}] = \det[\gamma\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \gamma \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$;

$2'$ $\det[\mathbf{a}, \mathbf{0}] = \det[\mathbf{0}, \mathbf{b}] = 0$;

3 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = 0$

$3'$ $\det[\mathbf{b}, \mathbf{a}] = -\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$

4 $\det[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 1$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ in $\mathbb{R}^2$ ed ogni γ in $\mathbb{R}$.

La proposizione afferma che la funzione determinante possiede le proprietà elencate e viceversa che una funzione con le proprietà elencate coincide con la funzione determinante.
Il complesso delle proprietà 1.1, 1.2, 2 (e 2') si dice "bilinearità" (la proprietà 2' è una conseguenza della proprietà 2, ottenuta ponendo $\gamma = 0$).
Il complesso delle proprietà 3 e 3' si dice "alternanza" (le proprietà 3 è una conseguenza della proprietà 3', ottenuta ponendo $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ e si può provare che viceversa la proprietà 3' è una conseguenza delle proprietà 1 e della 3).
La proprietà 4 afferma che il determinante della base canonica è 1, equivalentemente che il determinante della matrice unità è 1.

Verifica della proprietà 3:

$$\det[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

per la proprietà commutativa del prodotto di numeri reali.

Da queste proprietà segue la

Proposizione. Due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$.

Dimostrazione di una parte dell'enunciato, specificamente che $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ implica $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linearmente indipendenti. Consideriamo un'uguaglianza

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{0};$$

Quest'uguaglianza fra vettori implica
(a) l'uguaglianza fra matrici $[x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \mathbf{b}] = [\mathbf{0}, \mathbf{b}]$ che a sua volta implica l'uguaglianza

fra scalari

$$\det[x\mathbf{a} + y\mathbf{b}, \mathbf{b}] = \det[\mathbf{0}, \mathbf{b}],$$

che per le proprietà di sopra si riscrive

$$\begin{aligned} x \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + y \det[\mathbf{b}, \mathbf{b}] &= 0 \\ x \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= 0, \end{aligned}$$

che, per l'ipotesi $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ implica $x = 0$;
(b) l'uguaglianza fra matrici $[\mathbf{a}, x\mathbf{a} + y\mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{0}]$ che a sua volta implica l'uguaglianza fra scalari

$$\det[\mathbf{a}, x\mathbf{a} + y\mathbf{b}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{0}],$$

che per le proprietà di sopra si riscrive

$$\begin{aligned} x \det[\mathbf{a}, \mathbf{a}] + y \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= 0 \\ y \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] &= 0, \end{aligned}$$

che, per l'ipotesi $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ implica $y = 0$.

Orientamento di due vettori nel piano. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due vettori linearmente indipendenti del piano applicati in un punto O. Informalmente, si dice che $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ è una coppia "destrorsa" se si può appoggiare la mano destra sul piano in modo che l'indice stia sulla semiretta di $\mathbf{a}$ e il pollice stia sulla semiretta di $\mathbf{b}$; in modo analogo si da la nozione di coppia "sinistrorsa". Due coppie di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{a}', \mathbf{b}'$ si dicono "concordi" se sono entrambe destrorse o entrambre sinistrorse e si dicono "discordi" in caso contrario.

Il significato geometrico dei determinanti di matrici 2×2 è dato da

Proposizione. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^2$ e tramite di essa si identifichi $\mathcal{V}_O^2$ con $\mathbb{R}^2$. Allora per ogni due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathcal{V}_O^2$ si ha:
(1) il valore assoluto di $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ coincide con l'area del parallelogramma su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$;
(2) il segno di $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ è positivo o negativo secondo che la coppia $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ sia concorde o discorde con la coppia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Determinanti di matrici 3×3. Si definisce il determinante di una matrice di tipo 3×3 nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} &= a_1 \det \begin{bmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} - a_2 \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} + a_3 \det \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix} \\ &= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) \\ &= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \end{aligned}$$

Si ha così una funzione $\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$.

Posto $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}$, $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b}$, $\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \mathbf{c}$, la matrice si scrive in breve

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$$

e il suo determinante si scrive $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Si ha così una funzione $\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Esempio.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} = 1 \det \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - 2 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} + 3 \det \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$$
$$= 50 - 48 - 2(40 - 42) + 3(32 - 35) = -3.$$

Esempio.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Il determinante di una matrice 3×3 si può riscrivere come

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1$$

e interpretare come la somma dei tre prodotti degli elementi sulle diagonali discendenti e degli opposti dei tre prodotti degli elementi sulle diagonali ascendenti della matrice

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Si ha così una regola mnemonica, detta “regola di Sarrus.”

Proposizione. La funzione $\det : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è caratterizzata dalle seguenti proprietà

1.1 $\det[\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det[\mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{c}]$;

1.2 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{b}', \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}', \mathbf{c}]$;

1.3 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} + \mathbf{c}'] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}']$;

2 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \delta\mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \delta\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det[\delta\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \delta \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$;

$2'$ $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{0}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{0}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$;

3 $\det[\mathbf{a}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}] = 0$

$3'$ $\det[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}] = -\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$

4 $\det[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}', \mathbf{c}, \mathbf{c}'$ in $\mathbb{R}^3$ ed ogni δ in $\mathbb{R}$.

La proposizione afferma che la funzione determinante possiede le proprietà elencate e viceversa che una funzione con le proprietà elencate coincide con la funzione determinante.

Il complesso delle proprietà 1.1, 1.2, 1.3, 2 (e 2’) si dice “trilinearità” (la proprietà 2’ è una conseguenza della proprietà 2, ottenuta ponendo $\delta = 0$).

Il complesso delle proprietà 3 e 3’ si dice “alternanza” (le proprietà 3 è una conseguenza

della proprietà 3' e si può provare che viceversa la proprietà 3' è una conseguenza delle proprietà 1 e 3).
La proprietà 4 afferma che il determinante della base canonica è 1, equivalentemente che il determinante della matrice unità è 1.

Da queste proprietà segue la

Proposizione. Tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$.

Idea della dimostrazione di una parte dell'enunciato, specificamente che $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$ implica $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ linearmente indipendenti. Consideriamo un'uguaglianza

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = \mathbf{0};$$

Quest'uguaglianza fra vettori implica l'uguaglianza fra scalari

$$\det[x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{0}, \mathbf{b}, \mathbf{c}],$$

che per le proprietà di sopra si riscrive

$$\begin{aligned} x\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + y\det[\mathbf{b}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + z\det[\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= 0 \\ x\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= 0, \end{aligned}$$

che, per l'ipotesi $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$ implica $x = 0$.
In modo analogo si prova che $y = z = 0$.

Orientamento di tre vettori nello spazio. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre vettori linearmente indipendenti dello spazio applicati in un punto O. Informalmente, si dice che $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ è una terna "destrorsa" se si può porre la mano destra in modo che il pollice stia sulla semiretta di $\mathbf{a}$, l'indice stia sulla semiretta di $\mathbf{b}$, il medio stia sulla semiretta di $\mathbf{c}$; in modo analogo si da la nozione di terna "sinistrorsa". Due terne di vettori linearmente indipendenti $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ e $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ si dicono "concordi" se sono entrambe destrorse o entrambre sinistrorse e si dicono "discordi" in caso contrario.

Il significato geometrico dei determinanti di matrici 3×3 è dato da

Proposizione. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^3$ e tramite di essa si identifichi $\mathcal{V}_O^3$ con $\mathbb{R}^3$. Allora per ogni tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ in $\mathcal{V}_O^2$ si ha:
(1) il valore assoluto di $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ coincide con il volume del parallelepipedo su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$;
(2) il segno di $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ è positivo o negativo secondo che la terna $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sia concorde o discorde con la terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Determinanti di matrici $n \times n$. Una matrice quadrata $n \times n$ si può identificare con la sequenza delle sue n colonne

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \quad \text{dove} \quad \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_j \quad j = 1, \ldots, n;$$

consistentemente, l'insieme $\mathbb{R}^{n \times n}$ delle matrici quadrate $n \times n$ si può identificare con l'insieme $\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$ prodotto cartesiano di n copie di $\mathbb{R}^n$.

Teorema e Definizione. Esiste una ed una sola funzione, detta funzione "determinante",

$$\det : \mathbb{R}^{n \times n} \simeq \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

che possiede le seguenti proprietà:
(1) e (2); $\det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ è una funzione lineare del $j-$mo vettore $\mathbf{a}_j$ una volta fissati tutti gli altri (per ogni j fissato);
(2') se un vettore $\mathbf{a}_j$ è nullo, allora $\det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = 0$ (per ogni j fissato);
(3) se due vettori $\mathbf{a}_j$ ed $\mathbf{a}_h$ con $j \neq h$ coincidono, allora $\det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] = 0$ (per ogni $j \neq h$ fissati);
(3') scambiando due vettori $\mathbf{a}_j$ ed $\mathbf{a}_h$ con $j \neq h$, $\det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ cambia segno (per ogni $j \neq h$ fissati);
(4) $\det[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n] = 1$.

Il complesso delle proprietà 1, 2 (e 2') si dice "$n-$linearità"
Il complesso delle proprietà 3 e 3' si dice "alternanza" (le proprietà 3 e 3' sono equivalenti).
La proprietà 4 afferma che il determinante della base canonica è 1, equivalentemente che il determinante della matrice unità è 1.

Da queste proprietà segue il

Teorema. n vettori $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\det[\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n] \neq 0$.

che equivale al

Teorema. Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, è biiettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$.

La funzione determinante si comporta bene rispetto al prodotto di matrici:

Teorema. Per ogni A, B matrici quadrate dello stesso tipo,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Altri significati geometrici.

Fissata nel piano un'unità di misura, per ogni due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ applicati in uno stesso punto O, indichiamo con $\mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ l'area del parallelogramma su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Proposizione. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^2$, tramite di essa si identifichino $\mathcal{V}_O^2$ e le applicazioni di $\mathcal{V}_O^2$ in sè con $\mathbb{R}^2$ e le applicazioni di $\mathbb{R}^2$ in sè. Sia data un'applicazione lineare biiettiva $\mathcal{V}_O^2 \to \mathcal{V}_O^2$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$, rappresentata da una matrice A 2×2. Allora:
(1) le aree dei parallelogrammi su due vettori sono proporzionali alle aree dei parallelogrammi sui due vettori immagine, con fattore di proprzionalità dato dal valore assoluto del determinante di A, specificamente:

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = |\det(A)|\, \mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

(2) per $\det(A) > 0$, ciascuna coppia di vettori è concorde con la coppia di vettori immagine; per $\det(A) < 0$, ciascuna coppia di vettori è disconcorde con la coppia di vettori immagine.

Fissata nello spazio un'unità di misura, per ogni tre vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ applicati in uno stesso punto O, indichiamo con $\mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ il volume del parallelepipedo su $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Proposizione. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_O^3$, tramite di essa si identifichino $\mathcal{V}_O^3$ e le applicazioni di $\mathcal{V}_O^3$ in sè con $\mathbb{R}^3$ e le applicazioni di $\mathbb{R}^3$ in sè. Sia data un'applicazione

lineare biiettiva $\mathcal{V}_O^3 \to \mathcal{V}_O^3$, $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$, rappresentata da una matrice A 3×3. Allora:
(1) i volumi dei parallelepipedi su tre vettori sono proporzionali ai volumi dei parallelepipedi sui tre vettori immagine, con fattore di proprzionalità dato dal valore assoluto del determinante di A, specificamente:

$$\mathcal{V}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = |\det(A)|\ \mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c});$$

(2) per $\det(A) > 0$, ciascuna terna di vettori è concorde con la terna di vettori immagine; per $\det(A) < 0$, ciaascuna terna di vettori è disconcorde con la terna di vettori immagine.