Lezione del 07.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Sistemi di n equazioni lineari in n incognite.

Un'equazione in n incognite $x_1, \ldots, x_n$ si dice lineare se è data da un'uguaglianza fra un polinomio omogeneo di primo grado in $x_1, \ldots, x_n$ e una costante; una soluzione dell'equazione è una sequenza di n numeri reali che sostituiti ordinatamente alle incognite rende vera l'uguaglianza.
Un sistema lineare in certe incognite è una sequenza di equazioni lineari in quelle incognite; una soluzione del sistema è una soluzione simultanea di tutte le equazioni.
Siamo interessati ai sistemi lineari nei quali il numero di equazioni è uguale al numero di incognite, specificamente a quelli che hanno una ed una sola soluzione.

Un'equazione lineare in una incognita x è un'equazione della forma

$$ax = b, \qquad (a, b \text{ costanti } \in \mathbb{R}).$$

Un sistema lineare di 2 equazioni nelle 2 incognite x_1, x_2 è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \qquad (a_{ij}, b_i \text{ costanti } \in \mathbb{R});$$

questo sistema si può riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

e in forma sintetica come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (A \in \mathbb{R}^{2\times 2};\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2).$$

Un sistema lineare di n equazioni nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$ è un sistema della forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (a_{ij}, b_i \text{ costanti } \in \mathbb{R});$$

gli a_{ij} si dicono coefficienti e i b_i termini noti del sistema; questo sistema si può riscrivere come

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

e in forma sintetica come

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (A \in R^{n\times n};\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n).$$

Dunque, un sistema lineare di n equazioni fra numeri reali in n incognite reali (con n^2 coefficienti ed n termini noti) si può vedere come una sola equazione fra vettori in $\mathbb{R}^n$ in una sola incognita in $\mathbb{R}^n$ (con un solo coefficiente matrice $n \times n$ e un solo termine noto in $\mathbb{R}^n$).

Una equazione lineare in una incognita x, $ax = b$ (a, b costanti in $\mathbb{R}$) ha una ed una sola soluzione se e solo se $a \neq 0$; in tal caso la soluzione è data da $x = a^{-1}b$, dove a^{-1} è l'inverso di a, caratterizzato dalla proprietà $a^{-1}a = 1$.

Di seguito mostriamo:
(1) un modo per stabilire, senza dover cercare di risolverlo, se un sistema lineare di n

equazioni in n incognite ha una ed una sola soluzione;
(2) per un tale sistema, un modo per determinare la soluzione.

Matrici invertibili, matrice inversa.

Definizione. Siano A, B matrici $n \times n$. Si dice che B è una "inversa" di A se

$$BA = I_n = AB,$$

dove I_n è la matrice unità $n \times n$. A si dice invertibile se possiede una inversa.

Proposizione. Se A possiede una inversa, allora ne possiede una sola. L'inversa di A si indica con A^{-1}.

(Ci si può rendere conto di questa affermazione nel modo seguente. Se B_1 e B_2 sono due inverse di A, allora $B_2 = B_2 I_n = B_2(AB_1) = (B_2 A)B_1 = I_n B_1 = B_1$.)

Esempio. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

è invertibile, con inversa

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Infatti

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

(lo si verifichi).

Osservazione. Se una matrice A $n \times n$ è invertibile, allora $\det(A) \neq 0$.
Infatti se esiste una matrice B $n \times n$ tale che $BA = I_n = AB$ allora in particolare si ha $\det(BA) = \det(I_n)$, da cui $\det(A)\det(B) = 1$, da cui $\det(A) \neq 0$.

Esempio. La matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

ha $\det(A) = 0$ dunque non è invertibile.

L'osservazione di sopra è cruciale. Si può provare il seguente

Teorema. Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Una formula per la matrice inversa.

Premesse. La formula che daremo per la matrice inversa coinvolge l'operazione di prodotto di uno scalare per una matrice, la trasposizione di matrici e soprattutto i complementi algebrici di una matrice.

Prodotto di uno scalare per una matrice. Il prodotto αA di uno scalare α per una matrice A di tipo $m \times n$ e la matrice di tipo $m \times n$ ottenuta moltiplicando α per ciascun elemento di A. Ad esempio:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 5/2 \\ 3/2 & 3 \end{bmatrix}$$

Trasposta di una matrice. La matrice "trasposta" di una matrice A di tipo $m \times n$ è la matrice A^T di tipo $n \times m$ ottenuta da A trascrivendo le righe come colonne o che è lo stesso trascrivendo le colonne come righe; in altri termini: l'elemento di posto (i, j) in A^T è l'elemento di posto (j, i) di A, per ogni i, j. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Le operazioni di prodotto di scalari per matrici e di prodotto di matrici soddisfano la proprietà

$$A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$$

per ogni scalare α ed ogni A, B matrici per le quali esiste il prodotto AB.

Complementi algebrici di una matrice. Sia A una matrice quadrata. Intersecando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A si ha l'elemento di posto (i, j) di A che indichiamo con a_{ij}. Cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A si ottiene una sottomatrice quadrata; questa sottomatrice ha un certo determinante; questo determinante, preso col suo segno o col segno opposto secondo che $i + j$ sia pari o dispari, si dice "complemento algebrico" di posto (i, j) di A; lo indichiamo con A_{ij}.

Esempio.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}; \quad A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} = -11; \quad A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = -(-6) = 6.$$

Siamo ora nelle condizioni di dare una formula per la matrice inversa.

Teorema. Sia A una matrice $n \times n$ invertibile. Allora l'inversa di A è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la trasposta della matrice dei complementi algebrici di A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T;$$

in particolare, per una matrice 2×2 invertibile si ha

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Esempio.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}^T = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} = \dots$$

Sistemi lineari.

Teorema. Sia dato un sistema lineare

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (A \in \mathbb{R}^{n\times n};\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n).$$

Allora:
(1) il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se A è invertibile;
(2) in tal caso, la soluzione è data da

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Proviamo una parte di questo teorema, precisamente che se A è invertibile, allora il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione, data da $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.
Se esiste una soluzione, essa è unica in quanto

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \ \text{ implica } \ A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \ \text{ cioè } \ I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \ \text{ cioè } \ \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b};$$

questa è una soluzione, in quanto

$$A(A^{-1}\mathbf{b}) = (AA^{-1})\mathbf{b} = I_n\mathbf{b} = \mathbf{b}.$$

Esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 4x + 5y = 9 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è una matrice che abbiamo visto essere invertibile, con matrice inversa data da

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13/2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Esempio. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 4y + 7z = 1 \\ 2x + 5y + 8z = -1 \\ 3x + 6y + 10z = 1 \end{cases}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La matrice dei coefficienti del sistema è una matrice che abbiamo visto essere invertibile, con matrice inversa data da

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 4 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$