Lezione del 08.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Sistemi lineari, matrici, determinanti.(Ripresa)

Nella lezione precedente abbiamo enunciato i seguenti teoremi

Teorema. Una matrice quadrata A è invertibile se e solo se $\det(A) \neq 0$.

Teorema. Sia dato un sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, ($A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$). Allora:
(1) il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se A è invertibile;
(2) in tal caso, la soluzione è data da $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Osservazione. Questo teorema afferma in particolare che la proprietà di un sistema lineare di avere una ed una sola soluzione dipende solo dalla matrice dei coefficienti e non dalla colonna dei termini noti. Dunque, per una fissata matrice quadrata A si ha che o tutti i sistemi lineari $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hanno una ed una sola soluzione o nessun sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione.

Questi due teoremi possono essere riassunti nell'unico

Teorema. Le seguenti affermazioni su una matrice A $n \times n$ sono equivalenti:
(1) $\det(A) \neq 0$;
(2) A è invertibile;
(3) ciascun sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione;
(4) il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
Nel caso in cui una (e dunque ciascuna) affermazione sia soddisfatta, per ciascun $\mathbf{b}$ in $\mathbb{R}^n$ la soluzione del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ è data da $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

In questa lezione mostriamo due interpretazioni di (parti di) questo teorema: una in termini di invertibilità e inversione di applicazioni lineari di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ in sè ed una in termini di basi di uno spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ e relative coordinate.

Richiami su invertibilità e inversione di funzioni fra insiemi

Una funzione $f : A \to B$ si dice biiettiva se per ogni $b \in B$ esiste uno ed un solo $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
Per ciascun insieme A, la funzione $\mathrm{id}_A : A \to A$ definita da $\mathrm{id}_A(a) = a$ per ogni $a \in A$ si dice funzione identità su A. Le funzioni identità sono elementi neutri rispetto alla composizione di funzioni, nel senso che per ogni $f : A \to B$ si ha

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ due funzioni. Si dice che g è una inversa di f se e solo se

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{id}_A \quad \text{cioè } g(f(a)) = a \text{ per ogni } a \in A \\ f \circ g &= \mathrm{id}_B \quad \text{cioè } f(g(b)) = b \text{ per ogni } b \in B. \end{aligned}$$

Se f possiede una inversa, allora essa è unica, la si indica con f^{-1}.

(Ci si può rendere conto dell'unicità nel modo seguente. Se g_1 e g_2 sono due inverse di f, allora $g_2 = g_2 \circ \mathrm{id}_B = g_2 \circ (f \circ g_1) = (g_2 \circ f) \circ g_1 = \mathrm{id}_A \circ g_1 = g_1$.)

Vale la seguente

Proposizione. Una funzione $f : A \to B$ è biiettiva se e solo se f è invertibile; in tal caso, l'inversa di f è la funzione $f^{-1} : B \to \mathbb{R}$ data da

$$f^{-1}(b) \text{ è l'unico } a \in A \text{ tale che } f(a) = b \qquad (\text{per ogni } b \in B).$$

(È ovvio che se una funzione è biiettiva allora è invertibile; meno ovvio è che se una funzione è invertibile allora è biiettiva.)

Interpretazione I. Applicazione lineare inversa.

Osservazioni.
- Per ogni intero positivo n, l'applicazione identica $\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è ovviamente lineare; id_n è rappresentata dalla matrice I_n unità di ordine n in quanto per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ si ha $\mathrm{id}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} = I_n\mathbf{x}$.
- Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare data da $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Per definizione, un'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ data da $G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ è un'inversa di F se e solo se $G \circ F = \mathrm{id}_n = F \circ G$. Poichè alla composizione di applicazioni lineari corrisponde il prodotto di matrici e all'applicazione identica corrisponde la matrice unità, ciò capita se e solo se $BA = I_n = AB$ cioè se e solo se B è una inversa di A.
- Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare data da $F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Per definizione, F è biiettiva se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esiste uno ed un solo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$. Per come è definita F, ciò capita se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ esiste uno ed un solo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tale che $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

In base a queste osservazioni, il Teorema sui sistemi lineari ha la seguente interpretazione nei termini di applicazioni lineari:

Teorema. Le seguenti affermazioni su un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ sono equivalenti:
(1) $\det(A) \neq 0$;
(2) L ha una inversa lineare;
(3) L è biiettiva.
In tal caso, l'applicazione inversa $L^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è data da $L^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}$.

Esempio. Consideriamo l'applicazione $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da $L(x, y) = (3x+2y, x+4y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Scrivendo le coppie ordinate come vettori colonna, l'applicazione si riscrive come

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+2y \\ x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Si ha

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 10 \neq 0,$$

quindi L è invertibile con inversa lineare. Inoltre, l'applicazione inversa è data da

$$L^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.1 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4x - 0.2y \\ -0.1x + 0.3y \end{bmatrix}.$$

Scrivendo i vettori colonna come coppie ordinate, l'applicazione L^{-1} si riscrive come $L^{-1}(x, y) = (0.4x - 0.2y, -0.1x + 0.3y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Interpretazione II. Basi e coordinate

Osservazioni.
Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ n vettori di $\mathbb{R}^n$ e sia $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ la matrice $n \times n$ che li ha come colonne.
-per definizione, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti e generano $\mathbb{R}^n$; ciò capita se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ l'equazione $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione; (le soluzioni di questa equazione sono le coordinate di $\mathbf{b}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$); ciò capita se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione;
-per definizione, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se l'equazione $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione $x_1 = \cdots = x_n = 0$; ciò capita se e solo se per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

In base a queste osservazioni, il Teorema sui sistemi lineari ha la seguente interpretazione nei termini di $n-$ple di vettori di $\mathbb{R}^n$:

Teorema. Siano $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ n vettori in $\mathbb{R}^n$ e sia $A = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n]$ la matrice $n \times n$ che li ha come colonne. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:
(1) $\det(A) \neq 0$;
(2) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ è una base di $\mathbb{R}^n$;
(3) $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ sono linearmente indipendenti.
Se una (e dunque ciascuna) affermazione è soddisfatta, allora per ciacun vettore $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, la colonna delle coordinate di $\mathbf{b}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ è data da $A^{-1}\mathbf{b}$.

Esempio. I vettori $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti; ogni due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^2$ formano una base di $\mathbb{R}^2$; dunque questi due vettori formano una base di $\mathbb{R}^2$. Per ogni vettore $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ l'equazione

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ha una ed una sola soluzione, che è il vettore delle coordinate di $\mathbf{b}$ rispetto alla base $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$. Questa equazione equivale al sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

che ha una ed una sola soluzione, data da

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.6 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2b_1 + 0.6b_2 \\ 0.4b_1 - 0.2b_2 \end{bmatrix}$$