Lezione del 14.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Applicazioni lineari dello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^2$ in sè.

Quadro generale.

Sia $L : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ un'applicazione lineare e sia noto il valore di L sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di una base di $\mathcal{V}_o^2$; per fissare le idee, supponiamo che $L(\mathbf{i}) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ e $L(\mathbf{j}) = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$. Allora è noto anche il valore di L su qualsiasi vettore di $\mathcal{V}_o^2$, ed è dato da

$$\begin{aligned} L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= xL(\mathbf{i}) + yL(\mathbf{j}) \\ &= x(2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) + y(\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \\ &= (2x + y)\mathbf{i} + (5x + 4y)\mathbf{j}; \end{aligned}$$

riassumendo:

$$L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (2x + y)\mathbf{i} + (5x + 4y)\mathbf{j}.$$

Scrivendo al posto di un vettore la coppia ordinata delle sue coordinate, otteniamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$L(x, y) = (2x + y, 5x + 4y);$$

scrivendo le coppie ordinate come vettori colonna, abbiamo

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 5x + 4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Identifichiamo l'applicazione lineare con la matrice che la rappresenta e scriviamo

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ossrvazione. Nella prima colonna della matrice compaiono le coordinate di $L(\mathbf{i})$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e nella seconda colonna della matrice compaiono le coordinate di $L(\mathbf{j})$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$;

Di seguito consideriamo alcuni tipi di applicazioni lineari con le relative matrici e vediamo come si corrispondono proprietà geometriche delle applicazioni e proprietà algebriche delle matrici.

Rotazioni.

Per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, definiamo la rotazione Rot_θ di angolo θ centrata nel punto O come l'applicazione $\mathrm{Rot}_\theta : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$, che manda ciscun vettore $\mathbf{v}$ in un vettore $\mathbf{v}'$ della stessa lunghezza in modo che
(1) per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$, la misura dell'angolo fra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ sia il valore assoluto di θ e la coppia $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ sia destrorsa oppure sinistrorsa secondo che $0 \leq \theta \leq \pi$ oppure $-\pi \leq \theta \leq 0$;
(2) per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed ogni intero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\mathrm{Rot}_{\theta + 2n\pi} = \mathrm{Rot}_\theta.$$

Fatti.
(1) Ciascuna rotazione è lineare; di più: conserva: la lunghezza di un vettore, l'angolo fra due vettori, l'area del parallelogramma su due vettori, la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa di una coppia ordinata vettori.

(2) Le rotazioni hanno la seguente proprietà rispetto alla composizione: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Rot}_{\alpha+\beta} = \mathrm{Rot}_\alpha \circ \mathrm{Rot}_\beta.$$

Sia ora e fino ad avviso contrario $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^2$. L'idea che useremo per determinare le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto ad una tale base si fonda sulla seguente

Osservazione. Per ciascun vettore non nullo $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, ci sono due vettori della stessa lunghezza di $\mathbf{v}$ ortogonali a $\mathbf{v}$, specificamente $\mathbf{v}' = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ e $\mathbf{v}'' = b\mathbf{i} - a\mathbf{j}$; inoltre, la coppia $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ è destrorsa e la coppia $\mathbf{v}, \mathbf{v}''$ è sinistrorsa.

Il valore della rotazione Rot_θ di angolo θ centrata in O sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ è dato da

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rot}_\theta(\mathbf{i}) &= \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j} \\
\mathrm{Rot}_\theta(\mathbf{j}) &= -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j}
\end{aligned}$$

(La prima affermazione segue dalla definizione di seno e coseno; la seconda affermazione segue dall'osservazione precedente). Dunque si ha

$$\mathrm{Rot}_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Osservazioni.
(1) Il fatto che ciascuna rotazione conservi l'area del parallelogramma su due vettori e la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa di una coppia ordinata vettori si riflette nel fatto che il determinante della matrice Rot_θ è

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

(2) La proprietà delle rotazioni rispetto all'operazione di composizione si riflette nella seguente proprietà delle metrici di rotazione rispetto al prodotto: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Questa uguaglianza equivale alle formule di addizione per le funzioni coseno e seno:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta\ -\ \sin\alpha\ \sin\beta \\
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta\ +\ \cos\alpha\ \sin\beta
\end{aligned}$$

Proiezioni ortogonali

Fatto e Definizione. Dato un versore $\mathbf{a}$, ciascun vettore $\mathbf{v}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \quad \text{con} \quad \mathbf{v}' \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}), \ \text{ e } \ \mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}.$$

L'applicazione

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} :: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}'$$

si dice "proiezione ortogonale" su $\mathbf{a}$.

Fatti.
(1) Ciascuna proiezione ortogonale è un'applicazione lineare, non biiettiva.
(2)

$$\begin{aligned} &\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}) && \text{per ogni } \mathbf{v} \\ &\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} && \text{se } \mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}) \\ &\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} && \text{se } \mathbf{v} \perp \mathbf{a} \end{aligned}$$

(3)

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} \circ \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}.$$

Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_o^2$ tale che $\mathbf{i} = \mathbf{a}$. Allora il valore di $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}$ sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ è dato da

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}; \quad \mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{j}) = \mathbf{0}.$$

Dunque si ha

$$\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si lascia al lettore di verificare come le proprietà di una applicazione di proiezione ortogonale si riflettano in proprietà della rispettiva matrice.

Riflessioni.

Fatto e Definizione. Dato un versore $\mathbf{a}$, ciascun vettore $\mathbf{v}$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}'', \quad \text{con} \quad \mathbf{v}' \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}), \quad \text{e} \quad \mathbf{v}'' \perp \mathbf{a}.$$

L'applicazione

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} :: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}' - \mathbf{v}''$$

si dice "riflessione" rispetto ad $\mathbf{a}$.

Fatti.
(1) Ciascuna riflessione è lineare; conserva la lunghezza di ciascun vettore, l'angolo fra due vettori, l'area del parallelogramma su due vettori, e manda ciascuna coppia di vettori destrorsa/sinistrorsa in una coppia sinistrorsa/destrorsa.
(2)

$$\begin{aligned} &\mathrm{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} && \text{se } \mathbf{v} \in \mathrm{Span}(\mathbf{a}) \\ &\mathrm{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = -\mathbf{v} && \text{se } \mathbf{v} \perp \mathbf{a} \end{aligned}$$

(3)

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} \circ \mathrm{R}_{\mathbf{a}} = \mathrm{id}_2.$$

Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_o^2$ tale che $\mathbf{i} = \mathbf{a}$. Allora il valore di $\mathrm{R}_{\mathbf{a}}$ sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ è dato da

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{i}) = \mathbf{i}; \quad \mathrm{R}_{\mathbf{a}}(\mathbf{j}) = -\mathbf{j}.$$

Dunque si ha

$$\mathrm{R}_{\mathbf{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Si lascia al lettore di verificare come le proprietà di una applicazione di riflessione si riflettano in proprietà della rispettiva matrice.

Scaling, o scalature.

Definizione. Sia fissata una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$. Per ogni r, s numeri reali, l'applicazione che moltiplica le coordinate di un vettore per i fattori r, s

$$\mathrm{S}_{r,s} :: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{S}_{r,s}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = rx\mathbf{i} + sy\mathbf{j}$$

si dice "scaling" o "scalatura" di coefficienti r, s.

Fatti.
(1) Ciascuna scalatura è lineare.
(2) Le scalature hanno come casi particolari le proiezioni ortogonali e le riflessioni:

$$\mathrm{S}_{1,0} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{i}}, \quad \mathrm{S}_{0,1} = \mathrm{Pr}_{\mathbf{j}}, \quad \mathrm{S}_{1,-1} = \mathrm{R}_{\mathbf{i}}, \quad \mathrm{S}_{-1,1} = \mathrm{R}_{\mathbf{j}}.$$

Rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si ha

$$\mathrm{S}_{r,s} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

A parole: l'applicazione di scaling di coefficienti r, s su una data base ha matrice (rispetto a tale base) diagonale, con elementi diagonali r, s.

Shear, o applicazioni di taglio.

Definizione. Sia fissata una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$. Per ogni numero reale r, la "applicazione di taglio" di coefficiente r è l'applicazione lineare $\mathrm{Sh}_r :: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$, che sui vettori della base assume i valori

$$\mathrm{Sh}_r(\mathbf{i}) = \mathbf{i}, \quad \mathrm{Sh}_r(\mathbf{j}) = r\mathbf{i} + \mathbf{j}.$$

Fatti.
(1) La definizione è ben posta.
(2) Ciascuna applicazione di taglio conserva l'area dei parallegromma du due vettori e la proprietà di essere destrorsa o di essere sinistrorsa di una coppia di vettori.

Rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si ha

$$\mathrm{Sh}_r = \begin{bmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A parole: cascuna applicazione di taglio su una data base ha matrice (rispetto a tale base) triangolare superiore, con elementi diagonali uguali a 1.