Lezione del 15.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Matrice di una scalatura rispetto a qualsiasi base

Nela lezione precedente, abbiamo descritto le scalature rispetto a opportune basi. Ora ci poniamo il problema di descrivere queste applicazioni rispetto ad una base fissata qualsiasi. Mostriamo un modo di soluzione basato sulla relazione che sussiste fra le scalature costruite sulle varie basi.

Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_o^2$ fissata; rappresentiamo tutte le applicazionin lineari rispetto a questa base.

Per ciascuna coppia di numeri reali r, s, lo scaling con coefficienti r, s è l'applicazione $S_{r,s} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ che trasforma ciascun vettore moltiplicando le sue coordinate rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ rispettivamente per i fattori r, s, in simboli:

$$S_{r,s}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = rx\mathbf{i} + sy\mathbf{j}.$$

Questa applicazione è lineare. Si ha $S_{r,s}(\mathbf{i}) = r\mathbf{i}$ e $S_{r,s}(\mathbf{j}) = s\mathbf{j}$. Dunque, rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ si ha

$$S_{r,s} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

In breve: l'applicazione di scaling di coefficienti r, s è rappresentata dalla matrice diagonale con elementi diagonali r, s.

Più in generale, data una base (non necessariamente ortonormale) $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ di $\mathcal{V}_o^2$, lo scaling con coefficienti r, s su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ è l'applicazione $S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ definita da

$$S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}}(x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = rx\mathbf{a} + sy\mathbf{b}.$$

In base a questa definizione si ha

$$S_{r,s} = S_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}.$$

La relazione fra lo scaling $S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}}$ e lo scaling $S_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}$ è data dalla seguente

Proposizione. Sia $F : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ l'applicazione lineare definita da

$$F(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}.$$

Allora

$$S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}} = F \circ S_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ F^{-1}.$$

Infatti, le due funzioni scritte ai due membri dell'uguale hanno lo stesso valore su ciascun vettore di $\mathcal{V}_o^2$, che possiamo prendere scritto nella forma $x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, in quanto
-da una parte si ha

$$S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}}(x\mathbf{a} + y\mathbf{b}) = rx\mathbf{a} + sy\mathbf{b}.$$

-dall'altra parte si ha

$$F\left(S_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}\left(F^{-1}(x\mathbf{a} + y\mathbf{b})\right)\right) = F\left(S_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)\right) = F\left(rx\mathbf{i} + sy\mathbf{j}\right) = rx\mathbf{a} + sy\mathbf{b}.$$

Questa relazione può essere usata per determinare la matrice che rappresenta lo scaling $S_{r,s;\mathbf{a},\mathbf{b}}$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Esempio. Consideriamo lo scaling $S_{1,-1;\mathbf{a},\mathbf{b}}$ dove $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

Poniamo $F : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ con $F(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$; e dunque $F(\mathbf{i}) = \mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$

Per la proposizione, si ha l'uguaglianza fra applicazioni

$$S_{1,-1;\mathbf{a},\mathbf{b}} = F \circ S_{1,-1;\mathbf{i},\mathbf{j}} \circ F^{-1}$$

alla quale corrisponde l'uguaglianza fra le relative matrici

$$S_{1,-1;\mathbf{a},\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \dots$$

Si lascia al lettore di completare i conti. Osserviamo che $S_{1,-1;\mathbf{a},\mathbf{b}}$ è la riflessione rispetto alla retta generata da **a** lungo la direzione del vettore **b**; in particolare, questa applicazione lineare conserva le aree e manda coppie destrorse in coppie sinistrorse e coppie sinstrorse in coppie destrorse. Dunque la matrice che rappresenta $S_{1,-1;\mathbf{a},\mathbf{b}}$ rispetto alla base ortonormale fissata deve avere determinante -1. Questa osservazione può essere usata per controllare la correttezza dei conti.

Applicazioni lineari dello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^3$ in sè.

Quadro generale.

Sia $L : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ un'applicazione lineare e sia noto il valore di L sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di una base di $\mathcal{V}_o^3$; per fissare le idee, supponiamo che

$$\begin{aligned} L(\mathbf{i}) &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ L(\mathbf{j}) &= 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k} \\ L(\mathbf{k}) &= 7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k} \end{aligned}$$

Allora è noto anche il valore di L su qualsiasi vettore di $\mathcal{V}_o^3$, ed è dato da

$$\begin{aligned} L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) &= xL(\mathbf{i}) + yL(\mathbf{j}) + zL(\mathbf{k}) \\ &= x(\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + y(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) + z(7\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}) \\ &= (x + 4y + 7z)\mathbf{i} + (2x + 5y + 8z)\mathbf{j} + (3x + 6y + 9z)\mathbf{k}; \end{aligned}$$

riassumendo:

$$L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = (x + 4y + 7z)\mathbf{i} + (2x + 5y + 8z)\mathbf{j} + (3x + 6y + 9z)\mathbf{k}.$$

Scrivendo al posto di un vettore la terna ordinata delle sue coordinate, otteniamo l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$L(x, y, z) = (x + 4y + 7z, 2x + 5y + 8z, 3x + 6y + 9z);$$

scrivendo le terne ordinate come vettori colonna, abbiamo

$$L \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 4y + 7z \\ 2x + 5y + 8z \\ 3x + 6y + 9z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Identifichiamo l'applicazione lineare con la matrice che la rappresenta e scriviamo

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Ossrvazione. Nella prima, seconda, terza colonna della matrice compaiono rispettivamente le coordinate di $L(\mathbf{i})$, $L(\mathbf{j}), L(\mathbf{k})$ rispetto alla base fissata.

Rotazioni.

Per ciascun numero reale θ e ciascun versore $\mathbf{a}$, definiamo la rotazione $\mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{a}}$ di angolo θ attorno ad $\mathbf{a}$ come l'applicazione $\mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{a}} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ che manda ciascun vettore $\mathbf{v}$ in un vettore $\mathbf{v}'$ che ha la stessa lunghezza, che con $\mathbf{a}$ forma lo stesso angolo, e tale che
(1) per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$, la misura dell'angolo fra il piano di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}$ e il piano di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{v}'$ sia il valore assoluto di θ e la terna $\mathbf{a}, \mathbf{v}, \mathbf{v}'$ sia destrorsa oppure sinistrorsa secondo che $0 \leq \theta \leq \pi$ oppure $-\pi \leq \theta \leq 0$;
(2) per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed ogni intero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\mathrm{Rot}_{\theta+2n\pi;\mathbf{a}} = \mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{a}}.$$

Fatti.
(1) Ciascuna rotazione è lineare; di più: conserva: la lunghezza di un vettore, l'angolo fra due vettori, l'area del parallelogramma su due vettori, il volume del parallelepipedo su tre vettori, la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa di una terna ordinata vettori.
(2) Le rotazioni attorno ad $\mathbf{a}$ hanno la seguente proprietà rispetto alla composizione: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Rot}_{\alpha+\beta;\mathbf{a}} = \mathrm{Rot}_{\alpha;\mathbf{a}} \circ \mathrm{Rot}_{\beta;\mathbf{a}}.$$

Sia ora e fino ad avviso contrario $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^3$. Le matrici che rappresentano le rotazioni attorno ai tre versori della base sono data da

$$\mathrm{Rot}_{\alpha;\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}_{\alpha;\mathbf{j}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Rot}_{\alpha;\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Scaling, o scalature.

Definizione. Sia fissata una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$. Per ogni r, s, t numeri reali, l'applicazione che moltiplica le coordinate di un vettore per i fattori r, s, t

$$\mathrm{S}_{r,s,t} :: \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathrm{S}_{r,s,t}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = rx\mathbf{i} + sy\mathbf{j} + tz\mathbf{k}$$

si dice "scaling" o "scalatura" di coefficienti r, s, t.

Ciascuna scalatura è lineare.

Rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ si ha

$$\mathrm{S}_{r,s,t} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix}.$$

A parole: l'applicazione di scaling di coefficienti r, s, t su una data base ha matrice (rispetto a tale base) diagonale, con elementi diagonali r, s, t.