

Lezione del 21.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

### Applicazioni lineari affini di $\mathcal{E}^2$ in sè.

#### Contesto, definizione, fatti generali.

Sia  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j})$  un sistema di riferimento in  $\mathcal{E}^2$  fissato una volta per tutte ( $O$  punto in  $\mathcal{E}^2$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  base ortonormale destrorsa di  $\mathcal{V}_O^2$ ).

Ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_O^2$  si può scrivere in uno ed un solo modo come  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ); identifichiamo il vettore  $\mathbf{v}$  con la coppia ordinata  $(x, y)$  delle sue coordinate e scriviamo  $\mathbf{v} = (x, y)$ . Così identifichiamo  $\mathcal{V}_O^2$  con  $\mathbb{R}^2$ .

Per ogni  $P \in \mathcal{E}^2$  il vettore  $OP$  si può scrivere in uno ed un solo modo come  $OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ); identifichiamo il punto  $P$  con la coppia ordinata  $(x, y)$  delle sue coordinate e scriviamo  $P = (x, y)$ . Così identifichiamo  $\mathcal{E}^2$  con  $\mathbb{R}^2$ .

L'applicazione che associa a ciascun vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_O^2$  il suo secondo estremo e l'applicazione che associa a ciascun punto  $P \in \mathcal{E}^2$  il vettore  $OP$  sono inverse l'una dell'altra e permettono di identificare  $\mathcal{V}_O^2$  con  $\mathcal{E}^2$ .

Queste identificazioni sono fra loro compatibili, nel senso che se un vettore ed un punto sono identificati, allora entrambi vengono identificati con la stessa coppia ordinata.

In particolare: il vettore  $\mathbf{i}$  viene identificato col suo secondo estremo, che indichiamo con  $E_1$ , ed entrambi vengono identificati con la coppia ordinata  $(1, 0)$ ; il vettore  $\mathbf{j}$  viene identificato col suo secondo estremo, che indichiamo con  $E_2$ , ed entrambi vengono identificati con la coppia ordinata  $(0, 1)$ ; il vettore nullo  $\mathbf{0}$  viene identificato col punto  $O$  ed entrambi vengono identificati con la coppia ordinata  $(0, 0)$ .

Ciascuna applicazione lineare di  $\mathcal{V}_O^2$  in sè dà origine ad una applicazione di  $\mathcal{E}^2$  in sè, ed entrambe vengono identificate con una stessa applicazione di  $\mathbb{R}^2$  in sè, che è lineare.

Ad esempio, l'applicazione  $Rot_\theta : \mathcal{V}_O^2 \rightarrow \mathcal{V}_O^2$  rotazione di vettori di un angolo  $\theta$  attorno ad  $O$  dà origine all'applicazione  $\overline{Rot}_\theta : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$  rotazione di punti di un angolo  $\theta$  attorno ad  $O$  definita da

$$\overline{Rot}_\theta(P) = P' \quad \text{tale che} \quad Rot_\theta(OP) = OP'$$

Entrambe le applicazioni vengono identificate con l'applicazione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $(x, y) \mapsto (x', y')$  dove

$$\begin{cases} x' = \cos \theta x - \sin \theta y \\ y' = \sin \theta x + \cos \theta y \end{cases} ,$$

che a sua volta viene identificata con la matrice

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} .$$

Indichiamo le tre applicazioni e la matrice con lo stesso simbolo  $Rot_\theta$ .

Traslazioni. Per ciascun vettore  $\mathbf{c} \in \mathcal{V}_O^2$ , la traslazione  $T_{\mathbf{c}}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{c}} : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ ,  $T_{\mathbf{c}}(P) = P'$  tale che

$$OP' = OP + \mathbf{c} .$$

In coordinate, posto  $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$ , si ha  $T_{\mathbf{c}}(x, y) = (x', y')$  dove

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x' = x + c_1 \\ y' = y + c_2 \end{cases}$$

Definizione. Un'applicazione  $F : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$  con  $F(P) = P'$  si dice “applicazione lineare affine” se è del tipo

$$OP' = L(OP) + \mathbf{c}$$

dove  $L : \mathcal{V}_o^2 \rightarrow \mathcal{V}_o^2$  è un'applicazione lineare e  $\mathbf{c}$  è un vettore in  $\mathcal{V}_o^2$ ; sinteticamente:

$$F = T_{\mathbf{c}} \circ L.$$

In coordinate, posto

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

si ha

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

Poichè le traslazioni sono biettive e conservano le lunghezze, gli angoli, le aree e la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa, si ha che  $F$  possiede una di queste proprietà se e solo se  $L$  la possiede. In particolare,  $F$  è biettiva se e solo se  $L$  è biettiva, e ciò capita se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0.$$

Si noti che  $x'$  e  $y'$  sono polinomi di grado al più uno in  $x$  e  $y$ . Vale il viceversa: si prova se a un'applicazione  $\mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$  corrisponde un'applicazione  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x', y')$  con  $x'$  e  $y'$  polinomi di grado al più uno in  $x$  e  $y$ , allora tale applicazione è lineare affine.

A tutti i tipi di applicazioni lineari viste corrispondono tipi di applicazioni lineari affini. Specificamente, alle applicazioni lineari  $\mathcal{V}_o^2 \rightarrow \mathcal{V}_o^2$  date da rotazioni attorno ad  $O$ , proiezioni ortogonali e riflessioni rispetto a una retta per  $O$ , scalature e applicazioni di taglio rispetto a due rette distinte per  $O$ , corrispondono le applicazioni lineari affini  $\mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$  date da rotazioni attorno ad un punto qualsiasi, proiezioni e riflessioni rispetto a una retta qualsiasi, scalature e applicazioni di taglio rispetto a due rette incidenti qualsiasi. Di seguito consideriamo proiezioni ortogonali e riflessioni.

### Proiezioni ortogonali.

Si dice che un punto  $P'$  è la “proiezione ortogonale” di un punto  $P$  sulla retta  $\ell$  se  $P \in \ell$  e  $PP' \perp \ell$ . Associando a ciascun punto il punto sua proiezione ortogonale su  $\ell$  si ottiene un'applicazione  $\text{Pr}_\ell : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ .

Le proiezioni su rette che passano per  $O$  sono lineari; le proiezioni su una retta qualunque sono lineari affini. Non dimostriamo questa affermazione, ma vediamo come emerge una istanza di questa affermazione in un esempio concreto.

Esempio. Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico nel piano  $\mathcal{E}^2$ , identifichiamo  $\mathcal{E}^2$  e  $\mathcal{V}_o^2$  con  $\mathbb{R}^2$ . Sia data la retta  $\ell$  di equazione cartesiana

$$\ell : x - 2y + 2 = 0.$$

Dato un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , determiniamo il punto  $P' = (x'_0, y'_0)$  sua proiezione ortogonale su  $\ell$ .

La retta  $\ell'$  passante per  $P_0$  ortogonale ad  $\ell$  ha equazione parametrica

$$\begin{cases} x = x_0 + t \\ y = y_0 - 2t \end{cases}$$

Il punto  $P'_0$  è il punto intersezione della retta  $\ell'$  con la retta  $\ell$ .

Sostituiamo ad  $x$  e  $y$  nell'equazione cartesiana di  $\ell$  la loro espressione data dall'equazione parametrica di  $\ell'$ ; otteniamo l'equazione

$$x_0 + t - 2(y_0 - 2t) + 2 = 0$$

nella incognita  $t$ ; questa equazione ha soluzione

$$t = \frac{-x_0 + 2y_0 - 2}{5}.$$

Sostituendo questo valore di  $t$  nell'equazione parametrica di  $\ell'$  otteniamo le coordinate di  $P'_0$

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \frac{-x_0 + 2y_0 - 2}{5} = \frac{4}{5}x_0 + \frac{2}{5}y_0 - \frac{2}{5} \\ y'_0 = y_0 - 2\frac{-x_0 + 2y_0 - 2}{5} = \frac{2}{5}x_0 + \frac{1}{5}y_0 + \frac{4}{5}. \end{cases}$$

L'applicazione di proiezione ortogonale dalla retta  $\ell$  è dunque data da  $\text{Pr}_\ell : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ ,  $\text{Pr}_\ell(x, y) = (x', y')$  dove

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{4}{5}. \end{cases}$$

$x'$  e  $y'$  sono polinomi di grado al più uno in  $x$  e  $y$ , dunque questa applicazione è lineare affine.

Osserviamo che  $\text{Pr}_\ell = T_{\mathbf{c}} \circ L$ , dove l'applicazione lineare  $L : \mathcal{V}_o^2 \rightarrow \mathcal{V}_o^2$  ed il vettore  $\mathbf{c}$  sono dati da

$$L = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Una verifica della correttezza del risultato. L'applicazione  $\text{Pr}_\ell$  non è biiettiva, dunque l'applicazione lineare  $L$  deve essere non biiettiva, cioè la matrice di  $L$  deve avere determinante nullo. Questa condizione è verificata:

$$\det(L) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = 0.$$

### Riflessioni.

Si dice che un punto  $P'$  è la "riflessione ortogonale" di un punto  $P$  rispetto alla retta  $\ell$  se il segmento  $PP'$  è ortogonale ad  $\ell$  ed ha punto medio su  $\ell$ . Associando a ciascun punto il punto il suo riflesso rispetto ad  $\ell$  si ottiene un'applicazione  $R_\ell : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ .

Le riflessioni rispetto a rette che passano per  $O$  sono lineari; le riflessioni rispetto a

rette qualunque sono lineari affini. Non dimostriamo questa affermazione, ma vediamo come emerge una istanza di questa affermazione in un esempio concreto.

Premessa. Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico nel piano  $\mathcal{E}^2$ , identifichiamo  $\mathcal{E}^2$  e  $\mathcal{V}_o^2$  con  $\mathbb{R}^2$ . È noto che le coordinate del punto medio  $M$  di un segmento  $AB$  sono la media delle rispettive coordinate dei punti  $A$  e  $B$ ; in simboli: se  $A = (a_1, a_2)$  e  $B = (b_1, b_2)$  allora

$$M = \left( \frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2} \right).$$

(Questa affermazione può essere provata come segue. Posto  $OA + OB = OC$  si ha che  $O, A, B, C$  sono i vertici di un parallelogramma che ha una diagonale  $OC$  ed una diagonale  $AB$ ; i punti medi delle due diagonali coincidono, dunque

$$OM = \frac{1}{2}OC = \frac{1}{2}(OA + OB).$$

Traducendo questa uguaglianza in coordinate, si ottiene l'asserto.)

Esempio. Fissato un sistema di riferimento ortogonale monometrico nel piano  $\mathcal{E}^2$ , identifichiamo  $\mathcal{E}^2$  e  $\mathcal{V}_o^2$  con  $\mathbb{R}^2$ . Sia data la retta  $\ell$  di equazione cartesiana

$$\ell : 2x - 3y + 6 = 0.$$

Dato un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , determiniamo il punto  $P' = (x'_0, y'_0)$  suo riflesso rispetto ad  $\ell$ .

Il punto  $P'_0$  sta sulla retta  $\ell'$  passante per  $P_0$  ortogonale ad  $\ell$  dunque ha coordinate del tipo

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + 2t \\ y'_0 = y_0 - 3t \end{cases}$$

per qualche valore di  $t$ .

Il punto medio del segmento  $P_0P'_0$  è

$$M = \left( x_0 + t, y_0 - \frac{3}{2}t \right).$$

Imponendo che questo punto stia sulla retta  $\ell$  otteniamo l'equazione

$$2(x_0 + t) - 3\left(y_0 - \frac{3}{2}t\right) + 6 = 0$$

nella incognita  $t$ ; questa equazione ha soluzione

$$t = -\frac{4}{13}x_0 + \frac{6}{13}y_0 - \frac{12}{13}.$$

Sostituiamo questo valore di  $t$  nell'espressione delle coordinate di  $P'_0$  ed otteniamo

$$\begin{cases} x'_0 = \frac{5}{13}x_0 + \frac{12}{13}y_0 - \frac{24}{13} \\ y'_0 = \frac{12}{13}x_0 - \frac{5}{13}y_0 + \frac{36}{13} \end{cases}$$

L'applicazione di riflessione ortogonale rispetto alla retta  $\ell$  è dunque data da  $R_\ell : \mathcal{E}^2 \rightarrow \mathcal{E}^2$ ,  $\text{Pr}_\ell(x, y) = (x', y')$  dove

$$\begin{cases} x' = \frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y - \frac{24}{13} \\ y' = \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y + \frac{36}{13} \end{cases}$$

Questa applicazione è dunque lineare affine.

Osserviamo che  $R_\ell = T_{\mathbf{c}} \circ L$ , dove l'applicazione lineare  $L : \mathcal{V}_o^2 \rightarrow \mathcal{V}_o^2$  ed il vettore  $\mathbf{c}$  sono dati da

$$L = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\frac{24}{13} \\ \frac{36}{13} \end{bmatrix}.$$

Osservazione. L'applicazione di riflessione conserva l'area del parallelogramma su due vettori, muta coppie destrorse di vettori in coppie sinistrorse di vettori e muta coppie sinistrorse di vettori in coppie destrorse di vettori. Dunque anche l'applicazione lineare  $L$  ha queste proprietà. Dunque il determinante della matrice di  $L$  deve essere -1. In effetti si ha

$$\det \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & -\frac{5}{13} \end{bmatrix} = -\frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -1.$$

### Applicazioni lineari affini di $\mathcal{E}^3$ in sè.

Sia  $(O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  un sistema di riferimento in  $\mathcal{E}^3$  fissato una volta per tutte ( $O$  punto in  $\mathcal{E}^3$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  base ortonormale destrorsa di  $\mathcal{V}_o^3$ ).

Ogni  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^3$  si può scrivere in uno ed un solo modo come  $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  ( $x, y, z$  in  $\mathbb{R}$ ); identifichiamo il vettore  $\mathbf{v}$  con la terna ordinata  $(x, y, z)$  delle sue coordinate e scriviamo  $\mathbf{v} = (x, y, z)$ . Così identifichiamo  $\mathcal{V}_o^3$  con  $\mathbb{R}^3$ .

Per ogni  $P \in \mathcal{E}^3$  il vettore  $OP$  si può scrivere in uno ed un solo modo come  $OP = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$  ( $x, y, z$  in  $\mathbb{R}$ ); identifichiamo il punto  $P$  con la terna ordinata  $(x, y, z)$  delle sue coordinate e scriviamo  $P = (x, y, z)$ . Così identifichiamo  $\mathcal{E}^3$  con  $\mathbb{R}^3$ .

L'applicazione che associa a ciascun vettore  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^3$  il suo secondo estremo e l'applicazione che associa a ciascun punto  $P \in \mathcal{E}^3$  il vettore  $OP$  sono inverse l'una dell'altra e permettono di identificare  $\mathcal{V}_o^3$  con  $\mathcal{E}^3$ .

Queste identificazioni sono fra loro compatibili, nel senso che se un vettore ed un punto sono identificati, allora entrambi vengono identificati con la stessa terna ordinata.

In particolare: il vettore  $\mathbf{i}$  viene identificato col suo secondo estremo  $E_1$ , ed entrambi vengono identificati con  $(1, 0, 0)$ ; il vettore  $\mathbf{j}$  viene identificato col suo secondo estremo  $E_2$ , ed entrambi vengono identificati con  $(0, 1, 0)$ ; il vettore  $\mathbf{k}$  viene identificato col suo secondo estremo  $E_3$ , ed entrambi vengono identificati con  $(0, 0, 1)$ ; il vettore nullo  $\mathbf{0}$  viene identificato col punto  $O$  ed entrambi vengono identificati con  $(0, 0, 0)$ .

Ciascuna applicazione lineare di  $\mathcal{V}_o^3$  in sè dà origine ad una applicazione di  $\mathcal{E}^3$  in sè, ed entrambe vengono identificate con una stessa applicazione di  $\mathbb{R}^3$  in sè, che è lineare.

Traslazioni. Per ciascun vettore  $\mathbf{d} \in \mathcal{V}_o^3$ , la traslazione  $T_{\mathbf{d}}$  è l'applicazione  $T_{\mathbf{d}} : \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$ ,  $T_{\mathbf{d}}(P) = P'$  tale che

$$OP' = OP + \mathbf{d}.$$

Definizione. Un'applicazione  $F : \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$  con  $F(P) = P'$  si dice "applicazione lineare affine" se è del tipo

$$OP' = L(OP) + \mathbf{d}$$

dove  $L : \mathcal{V}_o^3 \rightarrow \mathcal{V}_o^3$  è un'applicazione lineare e  $\mathbf{d}$  è un vettore in  $\mathcal{V}_o^3$ ; sinteticamente:

$$F = T_{\mathbf{d}} \circ L.$$

In coordinate, posto

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

si ha

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} x' = a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' = a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' = a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{cases}$$

Poichè le traslazioni sono biettive e conservano le lunghezze, gli angoli, le aree e la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa, si ha che  $F$  possiede una di queste proprietà se e solo se  $L$  la possiede. In particolare,  $F$  è biettiva se e solo se  $L$  è biettiva, e ciò capita se e solo se

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si noti che  $x', y', z'$  sono polinomi di grado al più uno in  $x, y, z$ . Vale il viceversa: si prova se una applicazione  $\mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$  corrisponde un'applicazione  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y, z) \mapsto (x', y', z')$  con  $x', y', z'$  polinomi di grado al più uno in  $x, y, z$ , allora tale applicazione è lineare affine.

A tutti i tipi di applicazioni lineari viste corrispondono tipi di applicazioni lineari affini.