Lezione del 22.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Funzioni da (intervalli di) $\mathbb{R}$ verso $\mathbb{R}$.

In questa lezione e nelle prossime due (le ultime del corso) si ricordano brevemente le nozioni e i fatti fondamentali sulle funzioni reali di una variabile reale, derivate ed integrali e si introducono le prime nozioni, fatti, ed esempi sulle curve nel piano e nello spazio.
La parte sulle funzioni reali di variabile reale è già nota a chi ha un diploma in area scientifica; qui vengono presentati gli argomenti che si ritengono necessari per la comprensione della seconda parte del corso, quella più propriamente di analisi numerica e modellazione geometrica.
Di passaggio, si introducono gli spazi vettoriali di funzioni e in particolare quelli di funzioni polinomiali.

Prime nozioni.

Notazione per gli intervalli sulla retta reale:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x \leq b\} \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} :\ a \leq x < b\} \\
&\vdots \\
]-\infty,+\infty[&= \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$. Il grafico di f è l'insieme delle coppie ordinate date da un elemento di I e dalla sua immagine, in simboli:

$$(\text{grafico di } f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} :\ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) :\ x \in I\}.$$

Primi esempi, funzioni potenza ad esponente naturale. Per ciascun numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$ indichiamo con p_n la funzione potenza $n-$ma:

$$p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p_n(x) = x^n.$$

Si lascia al lettore di comparare i grafici delle prime funzioni potenza p_n con $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

Esempio. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, data da $f(x) = x(x+1)(x-1)$. Considerazioni elementari sul segno di $f(x)$ e sul comportamento di $f(x)$ per valori arbitrariamente grandi (in senso positivo o negativo) portano a dare un possibile grafico di f.

Prime nozioni. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$.
(1) Si dice che f è "crescente" su I se per ogni $x_1, x_2 \in I$ da $x_1 < x_2$ segue $f(x_1) < f(x_2)$; analogamente per la nozione di fuunzione "decrescente";
(2) Si dice che un punto $x_0 \in I$ è un punto di "minimo assoluto" per f se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in I$, e che è "minimo assoluto stretto" se $f(x_0) < f(x)$ per ogni $x \in I$ con $x \neq x_0$; analogamente per le nozioni di "massimo assoluto" e "massimo assoluto stretto";
(3) Si dice che un punto $x_0 \in I$ è un punto di "minimo relativo" per f se esiste un intervallo non ridotto ad un punto I' con $x_0 \in I' \subseteq I$ tale che $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni

$x \in I'$, e che x_0 è “minimo relativo stretto” se $f(x_0) < f(x)$ per ogni $x \in I'$ con $x \neq x_0$; analogamente per le nozioni di “massimo relativo” e “massimo relativo stretto”.

Esempi.
Le funzioni potenza p_n con $n = 1, 3, 5, \dots$ dispari sono crescenti su $\mathbb{R}$.
Le funzioni potenza p_n con $n = 2, 4, 6, \dots$ pari sono crescenti su $[0, +\infty[$, sono descrecenti su $]-\infty, 0]$, ed hanno $x_0 = 0$ come punto di minimo assoluto stretto.
La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(x+1)(x-1)$ ha un punto x', che sta fra -1 e 0, di massimo relativo non assoluto ed ha un punto x'', che sta fra 0 e 1, di minimo relativo non assoluto.

Funzioni polinomiali, o polinomi.

Si dice che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una “funzione polinomiale”, in breve un “polinomio”, se per ogni $x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ si può scrivere come

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad (a_i \text{ costanti } \in \mathbb{R}).$$

Si prova che se per ogni $x \in \mathbb{R}$ $f(x)$ si può scrivere anche come

$$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_m x^m, \quad (b_i \text{ costanti } \in \mathbb{R}),$$

allora $a_i = b_i$ per ogni i minore-uguale al minimo fra n ed m e i restanti coefficienti sono nulli. Questo fatto viene detto “principio di identità dei polinomi.”
Se nella scrittura di sopra si ha $a_n \neq 0$ allora si dice che f ha “grado” n.

Un numero reale r tale che $f(r) = 0$ si dice “radice” di f. Si prova che se f è una funzione polinomiale di grado n allora f ha al più n radici.

Funzioni polinomiali di grado 1.

Pendenza. Siano $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti tali che la retta che li congiunge non sia parallela al secondo asse. Si dice “pendenza” del segmento $\mathrm{P_1P_2}$ il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate

$$(\text{pendenza di } \mathrm{P_1P_2}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Una funzione polinomiale di primo grado è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = mx + q, \quad (m, q \text{ costanti } \in \mathbb{R};\ m \neq 0)$$

cioè una funzione lineare affine; questo polinomio ha una ed una sola radice.
Le funzione è crescente, costante o decrescente secondo che m sia positivo, nullo o negativo.

Il grafico della funzione $f(x) = mx + q$ (con $m \neq 0$) è la retta di equazione cartesiana

$$y = mx + q.$$

Il coefficiente m è la pendenza comune a tutti i segmenti sulla retta. Infatti, per ogni due punti distinti $P_1 = (x_1, mx_1 + q)$ e $P_2 = (x_2, mx_2 + q)$ si ha

$$(\text{pendenza di } \mathrm{P_1P_2}) = \frac{mx_2 + q - (mx_1 + q)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m.$$

Funzioni polinomiali di grado 2.

Una funzione polinomiale di secondo grado è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ del tipo

$$f(x) = ax^2 + bx + c. \quad (a, b, c \text{ costanti } \in \mathbb{R};\ a \neq 0).$$

Questo polinomio ha al più due radici reali, che si trovano con la nota formula.

Il grafico della funzione $f(x) = ax^2 + bx + c$ (con $a \neq 0$) è la parabola di equazione cartesiana

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Si ha

$$x^2 + 3x + 1 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 1 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4};$$

dunque

$$f(x) \geq -\frac{5}{4}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$
$$f(x) = -\frac{5}{4} \quad \text{se e solo se} \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Dunque f ha un punto di minimo assoluto stretto in $x = -\frac{3}{2}$ e in tale punto assume il valore $-\frac{5}{4}$.
Il grafico di f è la parabola di equazioone cartesiana

$$y = x^2 + 3x + 1;$$

questa parabola ha vertice nel punto $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$, ha per asse la retta $x = -\frac{3}{2}$ ed ha concavità rivolta verso l'alto.

Spazi vettoriali di funzioni.

Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. La funzione $o : I \to \mathbb{R}$ definita da $o(x) = 0$ per ogni $x \in I$ si dice "funzione nulla"; per ogni funzione $f : I \to \mathbb{R}$, la funzione $-f : I \to \mathbb{R}$ defiinta da $(-f)(x) = -f(x)$ per ogni $x \in I$ si dice "funzione opposta di f.
Per ogni due funzioni $f, g : I \to \mathbb{R}$, si definisce la funzione somma $f + g : I \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $x \in I$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ ed ogni $f : I \to \mathbb{R}$, si definisce la funzione $\alpha f : I \to \mathbb{R}$ ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Si lascia al lettore di vedere queste operazioni nei termini dei grafici delle funzioni.
L'insieme $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ delle funzioni $f : I \to \mathbb{R}$, munito di queste operazioni, è uno spazio vettoriale, che ha dimensione infinita.

Spazio vettoriale dei polinomi di grado al più n.

Indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme delle funzioni polinomiali di $\mathbb{R}$ in sè; poichè la somma di due funzioni polinomiali è una funzione polinomiale e il prodotto di uno scalare per una funzione polinomiale è una funzione polinomiale, si ha che $\mathcal{P}$ con le operazioni di somma di funzioni e prodotto di scalari per funzioni è uno spazio vettoriale.
Lo stesso vale per l'insieme $\mathcal{P}_n$ delle funzioni polinomiali di grado al più n, per ciascun numero naturale fissato n. Questo spazio vettoriale ha una base canonica, data dalle funzioni potenza $p_0, p_1, \ldots, p_n$ e dunque ha dimensione $n + 1$.

Esempio. Le funzioni polinomiali di grado al più 2 sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{per ogni} \ \ x \in \mathbb{R},$$

dove a_0, a_1, a_2 sono costanti in $\mathbb{R}$, univocamente determinate da f. Per la definizione delle operazioni sulle funzioni si ha dunque che f si scrive come combinazione lineare

$$f = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$$

delle funzioni potenza p_0, p_1, p_2; inoltre questa scrittura è unica. Ciò significa che p_0, p_1, p_2 è una base dello spazio vettoriale $\mathcal{P}_2$, e a_0, a_1, a_2 sono le coordinate di f rispetto a questa base. Si ha $\dim(\mathcal{P}_2) = 3$.

Continuità.

Secondo una defnizione molto informale, una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ è "continua" su I se il suo grafico si può tracciare senza staccare la penna dal foglio.

Fatto. Tutti i polinomi sono funzioni continue.

Una della proprietà salienti delle funzioni continue è data dai seguenti teoremi (il primo ha come caso particolare il secondo)

Teorema (Principio dei valori intermedi). Sia data una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Allora per ogni $z \in \mathbb{R}$ con $f(x_1) < z < f(x_2)$ esiste almeno un $x^* \in I$ con $x_1 < x^* < x_2$ tale che $f(x^*) = z$.

Teorema (Teorema degli zeri). Sia data una funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$. Se $f(x_1)$ e $f(x_2)$ sono uno positivo e l'altro negativo, allora esiste un $x^* \in I$ con $x_1 < x^* < x_2$ tale che $f(x^*) = 0$.

Questo teorema permette di risolvere equazioni determinando radici in modo approssimato, con un qualsiasi grado di approssimazione.

Esempio. Consideriamo la funzione polinomiale $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Questo polinomio di terzo grado ha al più tre radici reali; mostriamo come se ne possa determinare una in modo approssimato.
Osserviamo che
$f(0) = 1$ e $f(1) = -1$, dunque esiste una radice di f che sta nell'intervallo $]0, 1[$;
$f(1/2) = -3/8$, dunque esiste una radice di f che sta nell'intervallo $]0, 1/2[$;
$f(1/4) = 17/64$, dunque esiste una radice di f che sta nell'intervallo $]1/4, 1/2[$;
...

Derivata.

Definizione informale. Sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ con I intervallo (non ridotto ad un punto). Per ogni $x \in I$ sia $\mathrm{P}_x = (x, f(x))$ il corrispondente punto del grafico. Si dice "derivata" di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$ il limite, se esiste, della pendenza del segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ per x che tende a x_0 :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} (\text{ pendenza di } \ \mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Non entriamo nel merito della definzione di limite. Sottolineiamo solo che interessa la pendenza del segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ per valori di x arbitrariamente vicini a x_0 ma diversi da x_0 in quanto per $x = x_0$ il segmento si riduce a un punto e non ha alcuna definita pendenza.
Se la funzione f è derivabile nel punto x_0, allora si definsce la retta tangente al grafico di f nel punto P_{x_0} come la retta che passa per P_{x_0} ed ha pendenza $f'(x_0)$. Questa retta ha equazione cartesiana

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Esempi informali.
(1) Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

(2) Consideriamo la funzione $f(x) = x^3$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

Si prova che

Per ciascun numero naturale n, la funzione potenza $f(x) = x^n$ è derivabile in ogni punto con derivata $f'(x) = nx^{n-1}$.

Si lascia al lettore di calcolare le derivate della funzione potenza di secondo grado nei punti $0, 1/4, 1/2, 1, 2$ e di dare un grafico di f compatibile con le informazioni ricavate.