Lezione del 28.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Convenzione, notazione.

D'ora innanzi, quando non detto diversamente, considereremo solo funzioni definite su insiemi di un certo tipo, cioè insiemi che si possono esprimere come unione di intervalli non ridotti ad un punto.

Sia data una funzione $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$. Supponiamo che per ciascun punto x_0 di I esista la derivata $f'(x_0)$ di f in x_0; allora si ha una funzione $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$, detta "funzione derivata" di f.
Spesso useremo la seguente notazione: indicheremo la funzione con

$$f(x) \quad (x \in \mathrm{I})$$

ed indicheremo la funzione derivata di f con

$$(f(x))' \quad (x \in \mathrm{I})$$

oppure

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x) \quad (x \in \mathrm{I}).$$

Uso delle derivate.

Le derivate possono essere usate per studiare l'andamento di una funzione, e dunque la forma del suo grafico. I primi risultati fondamentali in questa direzione sono riassunti dal seguente

Teorema. Sia $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile su un intervallo I, del tipo $\mathrm{I} =]a, b[$.
(1) Se f è crescente su I, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{I}$;
(1') Se f è decrescente su I, allora $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathrm{I}$;
(2) Se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathrm{I}$, allora f è strettamente crescente su I;
(2') Se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathrm{I}$, allora f è strettamente decrescente su I;
(3) Se $x_0 \in \mathrm{I}$ è un punto di minimo o massimo relativo per f, allora $f'(x_0) = 0$.

(La (1) è un'affermazione piuttosto elementare: se f è crescente su I, allora per ogni $x_0 \in \mathrm{I}$ la pendenza di ogni segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ è ≥ 0 ed anche il limite per x che tende ad x_0 di questa pendenza è ≥ 0, cioè $f'(x_0) \geq 0$. La (2) è più profonda (si basa sul teorema del valor medio di Lagrange). La (3) è un'affermazione piuttosto elementare: se $x_0 \in \mathrm{I}$ è un punto di minimo relativo per f, allora: per ogni $x < x_0$ la pendenza di ogni segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ è ≤ 0 ed anche il limite per x che tende ad x_0 di queta pendenza è ≤ 0, cioè $f'(x_0) \leq 0$; per ogni $x > x_0$ la pendenza di ogni segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ è ≥ 0 ed anche il limite per x che tende ad x_0 di queta pendenza è ≥ 0, cioè $f'(x_0) \geq 0$; dunque $f'(x_0) = 0$.)

Questo teorema ha come conseguenza la seguente

Proposzione. Sia $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, derivabile su $]a, b[$, e sia $x_0 \in]a, b[$. Se esiste un intervallo $]a', b'[$ con $x_0 \in]a', b'[\subseteq]a, b[$ tale che $f'(x) < 0$ per ogni $x \in]a', x_0[$ e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in]x_0, b'[$, allora x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Vale una proposizione analoga con tesi x_0 punto di massimo relativo.

Derivazione e operazioni di somma di funzioni e prodotto di scalari per funzioni.

Proposizione (proprietà di linearità). Siano $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili in un punto $x_0 \in \mathrm{I}$. Allora
(1) anche la funzione $f + g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, inoltre

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0);$$

(2) anche la funzione $\alpha f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile in x_0, inoltre

$$(\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0).$$

Si ha anche una versione di questa proposizione nella quale sia nelle ipotesi che nella tesi compare la derivabilità in ogni punto di I; in questa versione, le uguaglianze di sopra si possono riscrivere come

$$(f(x) + g(x))' = (f(x))' + (g(x))'$$

e

$$(\alpha f(x))' = \alpha(f(x))'.$$

Conseguenza. Poiché le funzioni potenza sono derivabili su $\mathbb{R}$, anche le combinazioni lineari delle funzioni potenza, cioè i polinomi, sono derivabili su $\mathbb{R}$. Inoltre, la funzione derivata di un polinomio è ancora un polinomio. Ad esempio, per ogni polinomio di III grado

$$a + bx + cx^2 + dx^3 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

si ha

$$\begin{aligned}(a + bx + cx^2 + dx^3)' &= (a)' + (bx)' + (cx^2)' + (dx^3)' \\ &= 0 + b(x)' + c(x^2)' + d(x^3)' \\ &= b + 2cx + 3dx^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

Applicazione. Consideriamo la funzione polinomiale

$$f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

(abbiamo visto in precedenza che ha una radice nell'intervallo $]1/4, 1/2[$).
$f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x + 1)(x - 1).$$

$f'(x)$ è positiva, negativa, positiva secondo che x sia minore di -1, compreso fra -1 e 1, maggiore di 1. Dunque:
$f(x)$ è crescente, decrescente, crescente per x minore di -1, compreso fra -1 e 1, maggiore di 1;
$f(x)$ ha un massimo relativo in $x = -1$ con valore associato $f(-1) = 3$;
$f(x)$ ha un minimo relativo in $x = 1$ con valore associato $f(1) = -1$.

Si lascia al lettore di determinare, con un grado di approssimazione di $1/8$, le radici di f e di dare una rappresentazione grafica delle informazioni acquisite.

Funzioni razionali.

Un'espressione del tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi, con $q(x)$ non identicamente nullo, definisce una funzione con dominio $\{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$; indicato con m il grado di $q(x)$ questo dominio è dunque tutto $\mathbb{R}$ esclusi al più m punti. Una funzione di questo tipo si dice “funzione razionale”.

Esempio. La funzione

$$\frac{1}{x} \qquad (x \neq 0).$$

Sull'intervallo $]0, +\infty[$ la funzione assume valori positivi ed è strettamente decrescente; assume valori positivi arbitariamente prossimi a 0 per valori di x abbastanza grandi ed assume valori arbitariamente grandi per valori di x positivi abbastanza prossimi a 0; si dice che il limite di $1/x$ per x che tende a $+\infty$ è 0^+ e che il limite di $1/x$ per x che tende a 0^+ è $+\infty$.
Sull'intervallo $]-\infty, 0[$ la funzione assume valori negativi ed è strettamente decrescente; il limite di $1/x$ per x che tende a $-\infty$ è 0^- e il limite di $1/x$ per x che tende a 0^- è $-\infty$.
Si dice che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale e che la retta $x = 0$ è un asintoto verticale per il grafico $y = 1/x$.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che $0 < f(x) \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, ed $f(x) = 1$ se e solo se $x = 0$; in particolare, f ha in $x = 0$ un punto di massimo assoluto con valore associato $f(0) = 1$. Il limite di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ o $-\infty$ è 0^+, dunque la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per il grafico di f.

Derivazione, prodotto di funzioni, divisione di funzioni.

Date due funzioni $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, si definiscono:
(1) la funzione prodotto $fg : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \quad \forall x \in \mathrm{I};$$

(2) sotto la condizione $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathrm{I}$, la funzione divisione $f/g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in \mathrm{I}.$$

Il comportamento della derivazione rispetto alle operazioni di prodotto e divisione di funzioni è dato dalla seguente

Proposizione. Per ogni $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili su un intervallo I si ha:
(1) anche la funzione $fg : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile su I, inoltre

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \quad \forall x \in \mathrm{I}.$$

(2) sotto la condizione $g(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathrm{I}$, anche la funzione $1/g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile su I, inoltre

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \forall x \in \mathrm{I}.$$

(3) sotto la condizione $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathrm{I}$, anche la funzione $f/g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile su I, inoltre

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \forall x \in \mathrm{I}.$$

Conseguenza. Poiché le funzioni polinomiali sono derivabili su $\mathbb{R}$, anche le funzioni razionali sono derivabili sul loro dominio di definizione.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \frac{3x+2}{5x+4}, \quad (x \neq -\frac{4}{5})$$

è derivabile in ogni punto $\neq -4/5$, con derivata

$$\begin{aligned} f'(x) = \left(\frac{3x+2}{5x+4}\right)' &= \frac{(3x+2)'(5x+4) - (3x+2)(5x+4)'}{(5x+4)^2} \\ &= \frac{3(5x+4) - (3x+2)5}{(5x+4)^2} \\ &= \frac{2}{(5x+4)^2} \end{aligned}$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{2}{(5x+4)^2} > 0 \quad \forall x \neq -\frac{4}{5}.$$

Dunque f è strettamente crescente sull'intervallo $]-\infty, -4/5[$ e sull'intervallo $]-4/5, +\infty[$.
Si può provare che
$f(x)$ tende a $(3/5)^-$ per x che tende a $+\infty$;
$f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a $(-4/5)^+$;
$f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a $(-4/5)^-$;
$f(x)$ tende a $(3/5)^+$ per x che tende a $-\infty$.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+1}\right)' = -\frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Si ha

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \begin{cases} > 0 \\ = 0 \\ < 0 \end{cases} \quad \text{per} \quad x \begin{cases} < 0 \\ = 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Dunque f è strettamente crescente sull'intervallo $]-\infty, 0[$, ha un massimo relativo in $x = 0$ con valore associato $f(0) = 1$, è strettamente decrescente sull'intervallo $]0, +\infty[$; il massimo relativo è anche assoluto.

Funzioni esponenziali e logaritmiche.

Consideriamo per ogni intero relativo n la corrispondente potenza di 2:

$$\begin{array}{ccccccccc} n & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2^n & \dots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & \dots \end{array}$$

si ha coasì una funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dall'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi verso $\mathbb{R}$. Si prova che questa funzione si può estendere in uno ed un solo modo ad una funzione continua 2^x $(x \in \mathbb{R})$ tale che

$$2^{x_1+x_2} = 2^{x_1}2^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Questa funzione si dice funzione "esponenziale in base 2" e si indica con $\exp_2$. Si ha

$$\exp_2(x) = 2^x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Consideriamo la funzione esponenziale in base 2 con codominio ristretto

$$\exp_2 : \mathbb{R} \to]0, +\infty[, \qquad \exp_2(x) = 2^x.$$

Si prova che per ciascun $b \in]0, +\infty[$, l'equazione

$$2^a = b$$

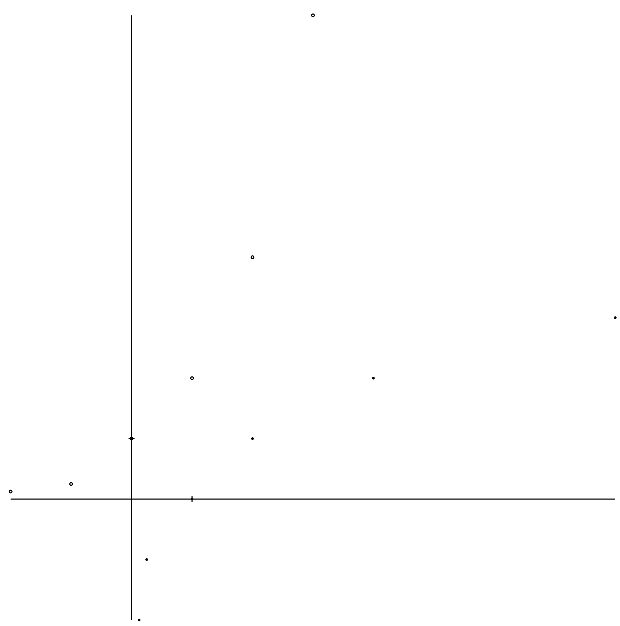
nell'incognita $a \in \mathbb{R}$ ha una ed una sola soluzione, che si dice logaritmo in base 2 di b :

$$a = \log_2 b.$$

Quindi la funzione esponenziale in base 2 con codominio ristretto è biiettiva, e la sua inversa è la funzione logaritmo in base 2

$$\log_2 :]0, +\infty[\to \mathbb{R}.$$

Nella figura seguente sono riportati alcuni punti del grafico di $\exp_2$ e i punti corrispondenti del grafico di $\log_2$.



I fatti qui stabiliti valgono tali e quali per le funzioni esponenziale e logaritmo, in una qualsiasi base ammissibile.

In particolare, in corrispondenza del "numero di Nepero" $e = 2,718\ldots$ si hanno:
- la funzione esponenziale naturale $\exp(x) = \exp_e(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$;
- la funzione logaritmo naturale $\ln(x) = \log_e(x)$ $(x \in]0, +\infty[)$
che sono l'una l'inversa dell'altra.

Si prova che:
- la funzione esponenziale e^x $(x \in \mathbb{R})$ è derivabile in ogni punto e coincide con la sua funzione derivata (ed è sostanzialmente l'unica funzione con questa proprietà):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^x = e^x \qquad (x \in \mathbb{R});$$

- la funzione logaritmo naturale $\ln(x)$ $(x \in]0, +\infty[)$ è derivabile in ogni punto del suo dominio e

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(x) = \frac{1}{x} \qquad (x \in]0, +\infty[).$$

Derivazione e composizione di funzioni.

Proposizione. Siano date due funzioni $f(x)$ $(x \in \mathrm{I})$ e $g(x)$ $(x \in \mathrm{J})$ con $\mathrm{I}, mathrm J$ intervalli tali che $f(x) \in \mathrm{J}$ per ogni $x \in \mathrm{I}$. Se $f(x)$ è derivabile in un punto $x_0 \in \mathrm{I}$ e $g(x)$ è derivabile nel punto $f(x_0)$ allora $g(f(x))$ è derivabile nel punto x_0 e

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} g(f(x))\right)_{x=x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} g(y)\right)_{y=f(x_0)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x)\right)_{x=x_0}.$$

Questa proposizione ha una versione nella cui ipotesi e tesi compare la derivabilità in ogni punto e la formula

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} g(f(x)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} g(y)\right)_{y=f(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} f(x).$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$e^{-x^2} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Questa funzione è derivabile in ogni punto in quanto è la funzione composta della funzione e^x $(x \in \mathbb{R})$ dopo la funzione $-x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ che sono derivabili in ogni punto, inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} e^{-x^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} e^y\right)_{y=-x^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(-x^2) = (e^y)_{y=-x^2}(-2x) = -2xe^{-x^2}.$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$\ln^3(x) \qquad (x \in]0, +\infty[).$$

Questa funzione è derivabile in ogni punto del suo dominio in quanto è la funzione composta della funzione x^3 $(x \in \mathbb{R})$ dopo la funzione $\ln(x)$ $(x \in]0, +\infty[)$ che sono derivabili in ogni punto del loro dominio, inoltre

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln^3(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}} y^3\right)_{y=\ln(x)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} \ln(x) = \left(3y^2\right)_{y=\ln(x)} \frac{1}{x} = \frac{3\ln^2(x)}{x}.$$

Esempio. Consideriamo la funzione

$$\ln(\ln(x^2+1)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Questa funzione è definita e derivabile in ogni punto, inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\ln(\ln(x^2+1)) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\ln(z)\right)_{z=\ln(x^2+1)} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\ln(y)\right)_{y=x^2+1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(x^2+1) \\
&= \left(\frac{1}{z}\right)_{z=\ln(x^2+1)} \left(\frac{1}{y}\right)_{y=x^2+1} (2x) \\
&= \frac{2x}{(\ln(x^2+1))\ (x^2+1)}.
\end{aligned}$$

Tabella di derivate elementari

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\ln(x)$	x^{-1}
e^x	e^x
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$

Si intende che: $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ è un intero relativo; il dominio delle funzioni è quello naturale, sempre $\mathbb{R}$ tranne che nei casi x^n con $n < 0$ e $\ln(x)$ nei quali è dato rispettivamente dalle condizioni $x \neq 0$ ed $x > 0$.

Funzioni definite a pezzi

La funzione valore assoluto, data da

$$|x| = \begin{cases} x & \text{per } \ x \geq 0 \\ -x & \text{per } \ x \leq 0 \end{cases}$$

è continua sul suo dominio ma non è derivabile in $x = 0$. Il fatto che questa funzione sia ben definta e continua sul suo dominio deriva dal fatto che le funzioni x $(x \geq 0)$ e $-x$ $(x \leq 0)$ assumono lo stesso valore in $x = 0$ e sono continue sul loro dominio. Questa funzione non è derivabile in $x = 0$ in quanto

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{per } \ x > 0 \\ -1 & \text{per } \ x < 0 \end{cases}$$

e dunque non esiste

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0}.$$

Al fatto analitico che non esiste la derivata della funzione in $x = 0$ corrisponde il fatto geometrico che non esiste un modo naturale di dare una tangente al grafico di $|x|$ nell'origine.

In generale, date due funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $g : [b, c] \to \mathbb{R}$ tali che $f(b) = g(b)$, si può definire una funzione $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } \; a \leq x \leq b \\ g(x) & \text{per } \; b \leq x \leq c, \end{cases}$$

e se f e g sono continue nel loro dominio allora anche h è continua sul suo. Inoltre, se f e g sono derivabili nel loro dominio e $f'(b) = g'(b)$ allora ache h è derivabile nel suo dominio.

Esempio. La funzione

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{per } \; x \leq 0 \\ -x^2 + x & \text{per } \; 0 \leq x \end{cases}$$

è derivabile sul suo dominio, poiché le due funzioni x^2+x $(x \leq 0)$ e $-x^2+x$ $(0 \leq x)$ sono derivabili sul loro dominio ed hanno stesso valore (specificamente 0) e stessa derivata (specificamente 1) in $x = 0$.
In questo modo, con due pezzi funzioni polinomiali di secondo grado si è ottenuta una funzione derivabile con un minimo ed un massimo relativi non assoluti.