Lezione del 29.11. Alcuni argomenti in dettaglio.

Premessa.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua; supponiamo per semplicità che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$. Il "trapezoide" di f su $[a, b]$, è la parte del piano $\mathbb{R}^2$ compresa fra l'asse x, il grafico di f, la retta $x = a$ e la retta $x = b$; lo indichiamo con $T(f; [a, b])$. L'area del trapezoide può essere calcolata, in realtà definita, come descritto informalmente di seguito.
Per ciascun $n = 1, 2, 3, \ldots$ si divide l'intervallo $[a, b]$ in n sottointervalli di uguale ampiezza e si approssima (in un qualche modo, sotto certi vincoli) la funzione f con una funzione f_n costante su ciascun sottointervallo. Ciascuna funzione f_n ha come trapezoide una unione di n rettangoli, e questo trapezoide ha area data dalla somma delle aree dei rettangoli. Il limite per n che tende a $+\infty$ di questa somma si definisce area del trapezoide di f su $[a, b]$.

Definizione di integrale.

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a, b]$ (che può assumere valori sia positivi che negativi).
Per ciascun $n = 1, 2, 3, \ldots$ si divida l'intervallo $[a, b]$ in n di sottointervalli della stessa ampiezza e in ciascun sottointervallo si scelga un punto; si avrà così una sequenza di punti $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$ che definiscono i sottointervalli $[a_0, a_1]$, $[a_1, a_2]$, ... $[a_{n-1}, a_n]$ e si avranno in questi sottointervalli dei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Si consideri infine la somma

$$f(x_1)(a_1 - a_0) + f(x_2)(a_2 - a_1) + \cdots + f(x_n)(a_n - a_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Si prova che comunque si scelgano gli x_i esiste il limite per n che tende a $+\infty$ di queste somme e che il limite non dipende da queste scelte. Questo limite si dice "integrale di f su $[a, b]$" e si indica con $\int_a^b f(x)dx$; in simboli:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(a_i - a_{i-1}).$$

Si prova che l'integrale possiede le seguenti proprietà e che è caratterizzato da esse.

Proposizione.
(1) Per ogni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

(2) Per ogni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua ed ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b (\alpha f(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$$

(3) Per ogni $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue con $f(x) \leq g(x)$ si ha

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

(4) Per ogni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e per ogni $a \leq x_1 < x_2 < x_3 \leq b$ si ha

$$\int_{x_1}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx$$

(5)

$$\int_a^b 1dx = b - a.$$

Integrale ed aree

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisce l'area del trapezoide di f su $[a, b]$ come l'integrale della funzione $|f|$ valore assoluto di f su $[a, b]$:

$$(\text{area di } T(f; [a, b])) = \int_a^b |f(x)|dx.$$

In particolare, se f assume solo valori di uno stesso segno su $[a, b]$ allora si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \pm(\text{area di } T(f; [a, b])),$$

con segno + o - secondo che f assuma solo valori ≥ 0 oppure solo valori ≤ 0 su $[a, b]$.

Si prova che questa definizione di area generalizza quella della geometria elementare. In particolare, per ogni $0 \leq a \leq b$ si ha

$$\int_a^b xdx = (\text{area di un trapezio di altezza (b-a) e basi } b, a) = \frac{(b+a)(b-a)}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Primitive.

Definizione. Una $F : I \to \mathbb{R}$ derivabile su I si dice "primitiva" di una $f : I \to \mathbb{R}$ se la funzione derivata di F è f, cioè $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.

Esempi.
(1) La funzione x $(x \in \mathbb{R})$ ha una primitiva data dalla funzione $\frac{1}{2}x^2$ $(x \in \mathbb{R})$ in quanto $(\frac{1}{2}x^2)' = \frac{1}{2}2x = x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; altre primitive sono le funzioni del tipo $\frac{1}{2}x^2 + c$, dove c è una costante in $\mathbb{R}$.
(2) La funzione $\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ha una primitiva data dalla funzione $\ln|x|$ $(x \neq 0)$. Infatti: per ogni $x > 0$ si ha $(\ln|x|)' = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$; per ogni $x < 0$ si ha $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$; altre primitive sono le funzioni del tipo

$$F(x) = \begin{cases} \ln(x) + c_1 & \text{per } \ x > 0 \\ \ln(-x) + c_2 & \text{per } \ x < 0 \end{cases}$$

dove c_1 e c_2 sono costanti in $\mathbb{R}$.

Proposizione. Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con I intervallo, ha una primitiva $F : I \to \mathbb{R}$, allora le primitive di f sono tutte e sole le funzioni del tipo $F + c$ dove c è una costante.

Osservazione. È immediato che tutte le funzioni del tipo $F + c$ siano primitive di f; è meno immmediato che tutte le primitive di f siano di questo tipo. Inoltre, se si toglie l'ipotesi che I sia un intervallo, allora la proposizione diventa falsa, come mostra l'esempio (2) di sopra.

Di seguito si riporta una tabella di primitive elementari

f	F
x^n $(n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
x^{-1}	$\ln\lvert x\rvert$
e^x	e^x
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$

Per ciascuna funzione f, si riporta una funzione F che è una primitiva di f su tutto il dominio di definzione di f. Per ciascun intervallo I contenuto nel dominio di definzione di f, le primitive di f su I sono del tipo $F + c$, con c costante.

Osservazione. Se una funzione $f(x)$ $(x \in [a, b])$ possiede una primitiva $F(x)$ $(x \in [a, b])$, allora ciascuna funzione del tipo $f(px + q)$ (con p, q costanti, $p \neq 0$) possiede una primitiva del tipo $\frac{1}{p}F(px + q)$. Infatti

$$(\frac{1}{p}F(px + q))' = \frac{1}{p}F'(px + q)p = f(px + q).$$

In questo modo, da ciascuna delle primitive elementari se ne possono ottenere altre.

Teorema fondamentale.

Notazione. Per ciascuna funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, si indica con $[g(x)]_a^b$ l'incremento di g fra a e b, cioè

$$[g(x)]_a^b = g(b) - g(a).$$

Si prova il

Teorema. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f, allora

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b.$$

Di seguito si riportano alcuni esempi di applicazione del teorema.

Esempio. Poichè la funzione x $(x \in \mathbb{R})$ ha una primitiva $\frac{x^2}{2}$, si ha

$$\int_a^b xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Esempio. Poichè la funzione $1/x$ $(x \in \mathbb{R}_{\neq 0})$ ha una primitiva $\ln|x|$, si ha

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln|x|]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$
$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}dx = [\ln(|x|)]_{-2}^{-1} = \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2).$$

Questi due integrali forniscono per la funzione $1/x$ l'area del trapezoide sull'intervallo $[1, 2]$ e l'opposta dell'area del trapezoide sull'intervallo $[-2, -1]$, in quanto la funzione assume valori ≥ 0 sul primo intervallo e ≤ 0 sul secondo intervallo.

Esempio. La funzione $\frac{1}{2x+3}$, $(x \neq -\frac{3}{2})$ possiede una primitiva $\frac{1}{2}\ln|2x+3|$ $(x \neq -\frac{3}{2})$. Dunque

$$\int_1^2 \frac{1}{2x+3}dx = \left[\frac{1}{2}\ln|2x+3|\right]_1^2 = \frac{1}{2}(\ln(7)-\ln(5)) = \frac{1}{2}\ln(\frac{7}{5}).$$

Esempio. Alcuni integrali elementari.

$$\int_2^3 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2}dx = \int_2^3 x^{-2}dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^3 = \left[-\frac{1}{x}\right]_2^3 = -\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{6}$$

$$\int_1^2 e^x dx = [e^x]_1^2 = e^2 - e$$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos(x)dx = [\sin(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} = \sin(\pi/2) - \sin(\pi/4) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Esempio. Combinazioni lineari di integrali elementari.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(\frac{2}{x} + 3 + 5x\right) dx &= 2\int_1^2 \frac{1}{x}dx + 3\int_1^2 1dx + 5\int_1^2 xdx \\ &= 2\left[\ln|x|\right]_1^2 + 3\left[x\right]_1^2 + 5\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 \\ &= 2\ln(2) + 3 + 5\frac{3}{2} \\ &= 2\ln(2) + \frac{21}{2}\end{aligned}$$