Analisi Numerica e Modellazione Geometrica - parte A; 26 luglio 2019

(1) (8 p.) Nello spazio Euclideo $\mathcal{E}^3$, identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $(\mathrm{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, sono dati:

- il piano α passante per i punti $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 2)$, $(2, 0, 1)$;
- il piano β di equazione cartesiana $x + y + z = 1$;
- la retta r passante per i punti $(1, 1, 0$, $(0, 2, 2)$;
- la retta s di equazione parametrica $x = 2t$, $y = 1 + t$, $z = 1 - t$.

(a) Si stabilisca se i piani β ed α sono paralleli,
(b) Si stabilisca se la retta r è parallela al piano β e in caso negativo si determini il punto di incidenza.
(c) Si stabilisca se le rette s ed r sono sghembe.

(2) (6 p.) Sono date le applicazioni

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \ F(x, y) = (x + y, y, x + y, y)$$
$$G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2, \ G(x, y, z, t) = (x + z, y + t).$$

(a) Si calcoli l'applicazione composta $G \circ F$ in due modi, usando la definizione di composizione di applicazioni ed usando la rappresentazione di applicazioni con matrici. (b) Si deterimini se possibile l'applicazione inversa $(G \circ F)^{-1}$.

(3) (6 p.) È dato il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Si calcoli l'inversa della matrice dei coefficienti del sistema, si effettui una verifica, e si usi tale inversa per risolvere il sistema.

(4) (6. p.) Nello spazio Euclideo $\mathcal{E}^3$, identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $(\mathrm{O}; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, è dato il piano π di equazione $x - y + z = 3$. Si determini l'applicazione $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di proiezione ortogonale su π e si effettui una verifica usando il determinante.

(5) (4 p.) È data la funzione

$$f : \mathbb{R}_{\neq 0} \to \mathbb{R}, \ f(x) = e^{\frac{1}{x} - 1}.$$

(1) Si calcoli la funzione derivata di f. (2) Si rappresenti la retta tangente al grafico di f nel punto del grafico di f avente ascissa $x = 1$