Lezione del 18.09; principali punti in dettaglio.

Spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^2$.

Ambito: piano euclideo, con i suoi enti primitivi, i suoi assiomi, le sue nozioni e i suoi teoremi, che verranno richiamati se e quando opportuno. Stile: descrittivo informale.

I punti del piano si indicano con lettere latine maiuscole $A, B, \ldots$ e il loro insieme con $\mathcal{E}^2$. Le rette del piano si indicano con lettere latine minuscole $r, s, \ldots$ Diciamo che due rette del piano sono "parallele" se non hanno alcun punto in comune oppure coincidono.

Due punti individuano un "segmento". Fissato un segmento unità, non ridotto a un punto, ad ogni segmento è associato un numero reale non negativo, la "lunghezza" del segmento rispetto al segmento unità.
Su un segmento vi sono due ordinamenti, uno opposto dell'altro, ai quali corrispondono due "segmenti orientati". Si indica con AB il segmento orientato in cui A è il primo estremo e B è l'ultimo. Si ha AB diverso da BA, a meno che A=B. Al posto di dire "segmento orientato con primo estremo A" si dice anche "vettore applicato in A".
Ciascun segmento orientato non ridotto ad un punto ha una "lunghezza", una "direzione" e un "verso". Due segmenti orientati, ciascuno non ridotto ad un punto, si dicono "equivalenti" se e solo se hanno la stessa lunghezza, direzione e verso; due segmenti orientati, uno dei quli ridotto ad un punto, si dicono "equivalenti" se e solo se sono entrambi ridotti ad un punto. Per indicare che AB è equivalente a CD scriviamo AB $\sim$ CD.

Fatto: per ogni segmento orientato AB ed ogni punto C esiste uno ed un solo punto D tale che il segmento orientato CD sia equivalente al segmento orientato AB.

Fissato un punto O, si indica con $\mathcal{V}_o^3$ l'insieme dei vettori OP applicati in O; spesso si prederisce indicarli con lettere latine minuscole sottolineate o in grassetto $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$; il vettore ridotto al solo punto O si dice "vettore nullo" e si indica con $\mathbf{0}$; per ogni vettore $\mathbf{v}$ applicato in O, il vettore applicato in O avente stessa lunghezza, stessa direzione, verso opposto a $\mathbf{v}$ si dice "vettore opposto" di $\mathbf{v}$ e si indica con $-\mathbf{v}$.

Somma di vettori. Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori applicati in O e sia $\mathbf{v}'$ il vettore equivalente a $\mathbf{v}$ applicato nel punto finale di $\mathbf{u}$; il vettore applicato in O che ha come punto finale il punto finale di $\mathbf{v}'$ si dice "somma" di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ e si indica con $\mathbf{u}+\mathbf{v}$. Si prova che questa operazione ha le seguenti

Proprietà.
1) $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ (associativa);
2) $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u}$ (commutativa);
3) $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u} = \mathbf{0}+\mathbf{u}$;
4) $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0} = (-\mathbf{u})+\mathbf{u}$;
(per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ in $\mathcal{V}_0^2$)

Commenti.
La 2) si può vedere così, nel caso in cui $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ non siano allineati:
$\mathbf{u}+\mathbf{v}$ ha come ultimo punto l'ultimo punto del vettore $\mathbf{v}'$ equivalente a $\mathbf{v}$ applicato nell'ultimo punto di $\mathbf{u}$;
$\mathbf{v}+\mathbf{u}$ ha come ultimo punto l'ultimo punto del vettore $\mathbf{u}'$ equivalente a $\mathbf{u}$ applicato nell'ultimo punto di $\mathbf{v}$;

$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$ in quanto $\mathbf{u},\mathbf{u}',\mathbf{v},\mathbf{v}'$ sono lati di un parallelogramma.
La 3) e la 4) sono evidenti.
Per la 1), si potrà scrivere una somma di tre o più termini senza dover usare parentesi.

Nel seguito diciamo brevemente "vettore" per intendere "vettore applicato in O".

Proposizione. Per ogni $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathcal{V}_o^2$ l'equazione $\mathbf{x}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$ ha una ed una sola soluzione in $\mathcal{V}_o^2$, data da $\mathbf{x}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$. Questa soluzione si dice "differenza" $\mathbf{b}$ meno $\mathbf{a}$ e si scrive in breve $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

(sommando $-\mathbf{a}$ ad entrambi i membri di $\mathbf{x}+\mathbf{a}=\mathbf{b}$ si ottiene $(\mathbf{x}+\mathbf{a})+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$; al primo membro si ha $(\mathbf{x}+\mathbf{a})+(-\mathbf{a})=\mathbf{x}+(\mathbf{a}+(-\mathbf{a}))=\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$ (per la proprietà associativa, la proprietà degli opposti e la proprietà del vettore nullo); dunque se c'è una soluzione, deve essere $\mathbf{x}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$; in modo analogo si verifica che questa è davvero una soluzione)

Prodotto di numeri reali per vettori. Il prodotto di un numero reale $r\neq 0$ per un vettore $\mathbf{u}\neq\mathbf{0}$ è il vettore $r\mathbf{u}$ tale che
-la lunghezza del segmento $r\mathbf{u}$ rispetto al segmento $\mathbf{u}$ è $|r|$ (valore assoluto di r);
-il verso di $r\mathbf{u}$ è uguale/opposto a quello di $\mathbf{u}$ secondo che r sia positivo/negativo.
In particolare, si ha $(-1)\mathbf{u}=-\mathbf{u}$.
Il prodotto di 0 per ciascun un vettore così come il prodotto di ciascun numero reale per $\mathbf{0}$ è $\mathbf{0}$.

L'operazione di prodotto di numeri reali per vettori è legata alle operazioni di somma di vettori e somma e prodotto di numeri reali dalle seguenti

Proprietà.
5) $r(\mathbf{u}+\mathbf{v})=r\mathbf{u}+r\mathbf{v}$;
6) $(r+s)\mathbf{u}=r\mathbf{u}+s\mathbf{u}$;
8) $(rs)\mathbf{u}=r(s\mathbf{u})$;
9) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$;
(per ogni r,s in $\mathbb{R}$ e $\mathbf{u},\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}_o^2$)

L'insieme $\mathcal{V}_o^2$, munito dell'operazione di somma di vettori e di prodotto di numeri reali per vettori si dice "spazio vettoriale geometrico 2-dimensionale".

Proposizione. Sia $\mathbf{i}$ un vettore non nullo. Un vettore $\mathbf{v}$ sta sulla retta di $\mathbf{i}$ se e solo se si può scrivere come multiplo reale di $\mathbf{i}$, cioè $\mathbf{v}=x\mathbf{i}$ per qualche $x\in\mathbb{R}$; in caso affermativo, questa scrittura è unica.

Motivazione. Da una parte, se $\mathbf{v}$ si può scrivere come $\mathbf{v}=x\mathbf{i}$ per qualche $x\in\mathbb{R}$, allora $\mathbf{v}$ sta sulla retta di $\mathbf{i}$, per la definzione di prodotto di un numero reale per un vettore. Dall'altra parte, se $\mathbf{v}$ sta sulla retta di $\mathbf{i}$ allora indicata con x la lunghezza di $\mathbf{v}$ rispetto ad $\mathbf{i}$, presa col segno + o - secondo che v sia concorde o discorde con i, si ha $\mathbf{v}=x\mathbf{i}$, per la definizione di prodotto di un numero reale per un vettore.
Unicità della scrittura. Siano $\mathbf{v}=x_1\mathbf{i}$ e $\mathbf{v}=x_2\mathbf{i}$ due scritture dello stesso vettore $\mathbf{v}$. Allora si ha $x_1\mathbf{i}=x_2\mathbf{i}$, da cui $x_1\mathbf{i}-x_2\mathbf{i}=\mathbf{0}$, da cui $(x_1-x_2)\mathbf{i}=\mathbf{0}$; da cui, essendo $\mathbf{i}\neq\mathbf{0}$, si ha $x_1-x_2=0$ cioè $x_1=x_2$.

Da questa proposizione si ha direttamente che

> Due vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ non nulli sono allineati se e solo se ciascuno dei due è un multiplo reale dell'altro.

Proposizione. Siano i, j due vettori, non allineati. Ciascun vettore $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

per qualche $x, y \in \mathbb{R}$. Si dice che x, y sono le "coordinate" di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Motivazione.
Esistenza della scrittura. Sia $\mathbf{v} = \mathrm{OP}$. La retta che è parallela alla retta di $\mathbf{j}$ e passa per P incontra la retta di $\mathbf{i}$ in uno ed un solo punto Q.
OQ sta sulla retta di $\mathbf{i}$ e QP è equivalente ad un vettore OR sulla retta di $\mathbf{j}$, e $\mathbf{v} = \mathrm{OQ} + \mathrm{OR}$. Per le prop. di sopra si ha $\mathrm{OQ} = x\mathbf{i}$ per qualche $x \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{OR} = y\mathbf{j}$ per qualche $y \in \mathbb{R}$. Così

$$\mathbf{v} = \mathrm{OQ} + \mathrm{OR} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}.$$

Unicità della scrittura. Siano $\mathbf{v} = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$ e $\mathbf{v} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$ due scritture dello stesso vettore $\mathbf{v}$. Allora si ha $x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j}$, da cui $(x_1 - x_2)\mathbf{i} = (y_2 - y_1)\mathbf{j}$; al primo membro si ha un vettore sulla retta di $\mathbf{i}$ e al secondo membro si ha un vettore sulla retta di $\mathbf{j}$; poichè $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ non sono allineati, entrambi i membri devono essere il vettore nullo; essendo $\mathbf{i} \neq \mathbf{0}$, si ha $x_1 - x_2 = 0$ cioè $x_1 = x_2$ ed essendo $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$, si ha $y_2 - y_1 = 0$ cioè $y_2 = y_1$.

Si dice "combinazione lineare" dei vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ con coefficienti $x, y \in \mathbb{R}$ il vettore $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. Così la proposizione precedente si può esprimere come

> Ciascun vettore di $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^2$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di due dati vettori non allineati $\mathbf{i}, \mathbf{j}$. I coefficienti della combinazione lineare si dicono "coordinate" del vettore rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Più in generale la "combinazione lineare" dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}_0^2$ con coefficienti $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ è il vettore

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n.$$