Lezione del 19.09; principali punti in dettaglio.

Spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^2$, calcolo di una espressione.
Svolgiamo un paio di calcoli nell'algebra dei vettori effettuando tutti i passaggi e realizziamo che questi calcoli hanno un aspetto di già noto, specifichiamo esattamente in quale senso e mostriamo il modo più veloce di svolgerli. Siano $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ due vettori in $\mathcal{V}_o^2$. Si ha

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = \mathbf{i} + (-(2\mathbf{j})) = \mathbf{i} + (-1)(2\mathbf{j}) = \mathbf{i} + (-2)\mathbf{j} = 1\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j};$$

i passaggi si basano su: la convenzione sulle scritture, la coincidenza fra passaggio all'opposto e moltiplicazione per -1, la proprietà 8, la proprietà 9. Dunque

$$\mathbf{i} - 2\mathbf{j} = 1\mathbf{i} + (-2)\mathbf{j}.$$

Se $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ non sono allineati, allora il vettore $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ ha coordinate 1 e -2 rispetto a $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + (-2)(2\mathbf{i} + (-1)\mathbf{j}) \\
&= \mathbf{i} + \mathbf{j} + (-2)(2\mathbf{i}) + (-2)((-1)\mathbf{j}) \\
&= \mathbf{i} + \mathbf{j} + (-4)\mathbf{i} + (2)\mathbf{j} \\
&= \mathbf{i} + (-4)\mathbf{i} + \mathbf{j} + (2)\mathbf{j} \\
&= 1\mathbf{i} + (-4)\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + (2)\mathbf{j} \\
&= (-3)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \\
&= -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}
\end{aligned}$$

Si lascia al lettore di vedere quali convenzioni e proprietà sono state usate nei vari passaggi.

Osservazione. Per le convenzioni adottate e le proprietà 1, 2, ..., 8, i calcoli possono essere svolti riguardando i simboli di vettore come indeterminate, le combinazioni lineari come polinomi omogenei di I grado a coefficienti reali in queste indeterminate, l'operazione di somma di combinazioni lineari come quella di somma di polinomi e l'operazione di prodotto di uno scalare per una combinazione lineare come quella di prodotto di un numero reale per un polinomio.

Modo più veloce. L'espressione $\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2(2\mathbf{i} - \mathbf{j})$ ha per risultato una combinazione lineare di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ i cui coefficienti possono essere cercati direttamente, così si ha

$$\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2(2\mathbf{i} - \mathbf{j}) = (1 - 2 \cdot 2)\mathbf{i} + (1 - 2(-1))\mathbf{j} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$

Spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^3$
Ambiente: spazio euclideo $\mathcal{E}^3$. Segmenti orientati, o vettori applicati, relazione di equivalenza $\sim$ fra segmenti orientati: come nel piano; esistenza ed unicità di un segmento orientato uscente da un dato punto equivalente ad un dato segmento orientato: quasi come nel piano.
Fissato un punto O dello spazio, si indica con $\mathcal{V}_o^3$ l'insieme dei vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$ applicati in O; vettore nullo $\mathbf{0}$ e opposto $-\mathbf{v}$ di un vettore $\mathbf{v}$: come nel piano.

Definizione della somma di due vettori: come nel piano, è una costruzione che avviene nel piano dei due vettori. Proprietà della somma: come nel piano:

1- associatività
2- commutatività
3- del vettore nullo
4- dell'opposto di un vettore

Convenzione. D'ora innanzi salvo esplicito avviso contrario diremo in breve "vettore" al posto di "vettore applicato in O".

Osservazione. Nel caso di tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ applicati in O non commplanari, la proprietà associativa $(\mathbf{i}+\mathbf{j})+\mathbf{k} = \mathbf{i}+(\mathbf{j}+\mathbf{k})$ si può vedere meglio. Se $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ sono a due a due ortogonali ed hanno la stessa lunghezza, il risultato è, nel cubo che ha O tra i suoi vertici e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tra i suoi lati, il vettore applicato in O che termina nel punto opposto di O, cioè la diagonale lunga uscente da O.

Definizione del prodotto di un numero reale per un vettore: come nel piano, è una costruzione che avviene nella retta del vettore. Proprietà di questa operazione rispetto alle altre: come nel piano:

5- rispetto alla somma di vettori
6- rispetto alla somma di numeri reali
7- rispetto al prodotto di numeri reali
8- rispetto al numero 1

Si hanno le seguenti proposizioni, che si motivano quasi come nel piano.

Proposizione. Sia r una retta per O e sia $\mathbf{i}$ un vettore su r, non nullo. Un vettore $\mathbf{v}$ sta sulla retta r se e solo se si può scrivere come $\mathbf{v} = x\mathbf{i}$ per qualche $x \in \mathbb{R}$; in caso affermativo, questa scrittura è unica. In particolare, indicato con $\mathcal{V}_o^r$ l'insieme dei vettori che stanno su r, si ha $\mathcal{V}_o^r = \{x\mathbf{i} : \ x \in \mathbb{R}\}$.

Proposizione. Sia π un piano per O e siano e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ due vettori su π, non allineati. Un vettore $\mathbf{v}$ sta sul piano π se e solo se si può scrivere come $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ per qualche $x, y \in \mathbb{R}$; in caso affermativo, questa scrittura è unica. In particolare, indicato con $\mathcal{V}_o^\pi$ l'insieme dei vettori che stanno su π, si ha $\mathcal{V}_o^\pi = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} : \ x, y \in \mathbb{R}\}$.

Si ha inoltre la

Proposizione. Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori non complanari. Allora ogni vettore $\mathbf{v}$ si scrive in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

x, y, z si dicono coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. In particolare, si ha $\mathcal{V}_o^3 = \{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

Motivazione. Proviamo solo l'esistenza della scrittura. Sia $\mathbf{v} = \mathrm{OP}$. La retta che è parallela alla retta di $\mathbf{k}$ e passa per P incontra il piano di $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ in uno ed un solo punto Q.

OQ sta sul piano di $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e QP è equivalente ad un vettore OR sulla retta di $\mathbf{k}$, e $\mathbf{v} = \mathrm{OQ} + \mathrm{OR}$.

Per le prop. di sopra si ha:
OQ $= x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ per qualche $x, y \in \mathbb{R}$,
OR $= z\mathbf{k}$ per qualche $z \in \mathbb{R}$.
Così

$$\mathbf{v} = \mathrm{OQ} + \mathrm{OR} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Riconoscimento della non complanarità di tre vettori.
Fatto: si consideri un cubo, un suo vertice, due delle diagonali corte e la diagonale lunga uscenti da esso. Queste diagonali non sono complanari. Di seguito riportiamo una verifica nell'algebra dei vettori.
Sia O il vertice considerato del cubo; identifichiamo i lati del cubo uscenti da O con tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ applicati in O, in modo che al lato comune alle facce delle due diagonali corte corrisponda $\mathbf{k}$. Allora le due diagonali corte sono $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ e $\mathbf{j}+\mathbf{k}$ e la diagonale lunga è $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.
La diagonale lunga sta sul piano delle due diagonali corte se e solo se si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} = x(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + y(\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

cioè

$$\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$$

cioè, per l'unicità della scrittura, tali che

$$x = 1 \text{ e } y = 1 \text{ e } x + y = 1,$$

impossibile; dunque la diagonale lunga non sta sul piano delle due diagonali corte.

Caratterizzazione di allineamento e complanarità.
Proposizione. Siano dati $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in $\mathcal{V}_o^3$ e si consideri l'equazione

$(*)\qquad x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$

(1) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non sono allineati, allora l'equazione $(*)$ ha SOLO la soluzione $x = y = 0$;
(2) Se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono allineati, allora l'equazione $(*)$ ha anche qualche soluzione diversa dalla soluzione $x = y = 0$.

Motivazione. (1) Lasciata al lettore. (2) Siano $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ allineati. Consideriamo prima il caso in cui non sono entrambi nulli, supponiamo che $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$; allora $\mathbf{v}_2$ sta sulla retta individuata da $\mathbf{v}_1$ e si può scrivere come $\mathbf{v}_2 = t\mathbf{v}_1$ per qualche $t \in \mathbb{R}$, e $t\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$; dunque l'equazione $(*)$ ha almeno la soluzione $x = t$, $y = -1$ diversa dalla $x = y = 0$. Se poi $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, allora l'equazione $(*)$ è soddisfatta per ogni valore di x, y in $\mathbb{R}$.

Proposizione. Siano dati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ in $\mathcal{V}_o^3$ e si consideri l'equazione

$(*)\qquad x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$

(1) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non sono complanari, allora l'equazione $(*)$ ha SOLO la soluzione $x = y = z = 0$; (2) Se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono complanari, allora l'equazione $(*)$ ha anche qualche soluzione diversa dalla soluzione $x = y = z = 0$.

Motivazione, solo della (2). Siano $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ complanari. Consideriamo solo il caso in cui non sono tutti e tre allineati, supponiamo che $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ non siano allineati. Allora $\mathbf{v}_3$ sta sul piano individuata da $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e si può scrivere come $\mathbf{v}_3 = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$ per qualche $s, t \in \mathbb{R}$, e $s\mathbf{v}_1 + tv_2 + (-1)\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$; dunque l'equazione $(*)$ ha almeno la soluzione $x = s$, $y = t$, $z = -1$ diversa dalla $x = y = z = 0$.

Proposizione. Siano dati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ in $\mathcal{V}_o^3$. Allora l'equazione

$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + x_3\mathbf{v}_3 + x_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$

ha anche qualche soluzione diversa dalla soluzione $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Motivazione, nel caso $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ non complanari: lasciata al lettore.

Spazi vettoriali.
Definizione. Si dice "spazio vettoriale reale" un insieme V dotato di due operazioni:
-un'operazione di somma che a due elementi di V associa un elemento di V, che soddisfa le proprietà
1) associatività;
2) commutatività;
3) esistenza di un elemento neutro, che sommato ad ogni altro restituisca l'altro;
4) per ogni elemento, esistenza di un suo opposto, che sommato ad esso dia l'elemento neutro.
-un'operazione di prodotto esterno che a un elemento di $\mathbb{R}$ e un elemento di V associa un elemento di V, che sia legata alle operazioni in V ed $\mathbb{R}$ dalle proprietà 5) ... 8) di sopra.
Gli elementi di V si dicono formalmente vettori e si indicano con lettere minuscole in grassetto come $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \ldots$; l'elemento neutro risulta essere unico, si dice vettore nullo e si indica con $\mathbf{0}$; per ogni elemento $\mathbf{v}$, il suo opposto risulta essere unico e si indica con $-\mathbf{v}$.

Tutte le affermazioni fatte sopra negli spazi vettoriali $\mathcal{V}_o^n$ $(n = 1, 2, 3)$ che sono state espresse solo nei termini delle operazioni e sono state ricavate usando solo le proprietà 1), ..., 8) valgono in uno spazio vettoriale qualsiasi.

Le caratterizzzazioni del non allineamento e non complanarità suggeriscono la

Def. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vettori di uno spazio vettoriale V e si consideri l'equazione

$(*) \qquad x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$

(1) Se l'equazione $(*)$ ha SOLO la soluzione $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ allora i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono "linearmente indipendenti"; (2) Se l'equazione $(*)$ ha anche qualche soluzione diversa dalla $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ allora i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono "linearmente dipendenti".

Si noti che nello spazio vettoriale geometrico 3-dimensionale $\mathcal{V}_o^3$ il numero 3 coincide con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in $\mathcal{V}_o^3$. Ciò suggerisce la seguente

Definizione. Si dice che uno spazio vettoriale V ha "dimensione" n, e si scrive $\dim(V) = n$, se n è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V; se non esiste un numero massimo di vettori linearmente indipndenti in V, si dice che V ha dimensione infinita e si pone $\dim(V) = \infty$.