Lezione del 25.09; principali punti in dettaglio.

Lunghezza, angolo, coseno . Fino ad avviso contrario, il contesto del discorso è il piano euclideo $\mathcal{E}^2$ con un punto fissato O, i vettori sono appicati in O e lo spazio vettoriale è $\mathcal{V}_o^2$.

Fissato un segmento unità, ad ogni segmento o segmento orientato è associato un numero reale non negativo, la lunghezza del segmento rispetto al segmento unità.
Per ciascun vettore $\mathbf{a}$, indichiamo la sua lunghezza rispetto all'unità con $\|\mathbf{a}\|$.

Angolo. Ricordiamo che un sottinsieme del piano si dice "convesso" se per ogni due punti nel sottinsieme, il segmento che li unisce è contenuto nel sottinsieme.
Consideriamo due semirette r ed s con origine in O, che non stiano sulla stessa retta. Allora r ed s individuano due parti di piano la cui unione è il piano e la cui intersezione è l'insieme dei punti di r ed s; una ed una sola delle due parti è convessa, questa parte si dice "angolo" fra le semirette r ed s e si indica con $\widehat{rs}$.
Nel caso di due semirette coincidenti, si pone $\widehat{rr} = r$; nel caso in cui r ed s siano semirette opposte su una stessa retta per O, r ed s individuano due semipiani; entrambi sono convessi, e ciascuno dei due si dice "angolo" fra le semirette r ed s e si indica con $\widehat{rs}$.
L'angolo $\widehat{rs}$ interseca ciascuna circonferenza centrata in O secondo un arco; il rapporto della lunghezza dell'arco sulla lunghezza del raggio non dipende dalla circonferenza e nemmeno dall'unità scelta per le lunghezze, si dice "misura" dell'angolo $\widehat{rs}$. Spesso un angolo si identifica con la sua misura.
Dunque in ogni caso si ha che $\widehat{rs}$ è compreso fra 0 e π e nei casi in cui r ed s sono coincidenti, ortogonali, opposte, si ha rispettivamente che $\widehat{rs}$ è $0, \pi/2, \pi$.
Si ha $\widehat{rs} = \widehat{sr}$.

Coseno di un angolo. Ciascuna circonferenza individua sulle semirette r ed s due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ applicati in O; la proiezione ortogonale $\mathbf{b}'$ di $\mathbf{b}$ sulla retta r si può scrivere in uno ed un solo modo come prodotto di un numero reale per $\mathbf{a}$, questo numero reale non dipende dalla circonferenza e nemmeno dall'unità scelta, si dice "coseno" dell'angolo $\widehat{rs}$ e si indica con $\cos\widehat{rs}$. Dunque il coseno dell'angolo $\widehat{rs}$ è definito implicitamente dalla relazione

$$\mathbf{b}' = \cos\widehat{rs}\ \mathbf{a}.$$

Dunque se $\widehat{rs}$ è nullo, acuto, retto, ottuso o piatto allora rispettivamente $\cos\widehat{rs}$ è uguale a 1, compreso fra 1 e 0, uguale a 0, compreso fra 0 e -1, uguale a -1.
Si ha $\cos\widehat{rs} = \cos\widehat{sr}$.

Ciascun vettore non nullo individua una semiretta. Si dice angolo fra due vettori non nulli l'angolo fra le corrispondenti semirette e analogamente per il coseno. In simboli, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori non nulli e r ed s sono le corrispondenti semirette, si pone $\widehat{\mathbf{uv}} = \widehat{rs}$ e $\cos\widehat{\mathbf{uv}} = \cos\widehat{rs}$.

Prodotto scalare Il prodotto scalare di due vettori non nulli $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ è il numero reale $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dato da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| \cos\widehat{\mathbf{ab}};$$

il prodotto scalare dei due vettori, uno dei quali nullo, è il numero zero

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = 0.$$

Questo prodotto dipende dall'unità scelta; se si divide il segmento unità per un numero reale positivo ρ allora $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ si moltiplica per ρ^2.

Il prodotto scalare è stato definito a partire dalla lunghezza di un vettore e dal coseno di due vettori. Viceversa, la lunghezza di un vettore e il coseno di due vettori si possono ottenere dai prodotti scalari. Infatti per ogni $\mathbf{a}$ si ha

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \|\mathbf{a}\|^2, \quad \text{da cui} \quad \|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$$

e, per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$,

$$\cos \widehat{\mathbf{ab}} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}}}.$$

In particolare, si ha

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| = 1 &\quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1 \\ \mathbf{a} \perp \mathbf{b} &\quad \text{se e solo se} \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0. \end{aligned}$$

L'operazione di prodotto scalare di vettori è legata alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di numeri reali per vettori dalle seguenti

Proprietà.
1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
2) $(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}$;
2') $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_2$;
3) $\mathbf{a} \cdot (r\mathbf{b}) = (r\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = r(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.
per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$ vettori e $r \in \mathbb{R}$.

Commenti. La 1), nel caso di due vettori non nulli, segue dalla proprietà commutativa del prodotto di numeri reali e dal fatto che $\cos \widehat{\mathbf{ab}} = \cos \widehat{\mathbf{ba}}$. La 2) non è ovvia. La 3), nel caso di due vettori non nulli, segue dal fatto che $\|\mathbf{a}\|\|r\mathbf{b}\| = \|r\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\| = |r|\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$ e $\cos \widehat{\mathbf{a}(r\mathbf{b})} = \cos \widehat{(r a)\mathbf{b}} = \pm \cos \widehat{\mathbf{ab}}$ secondo che $r > 0$ o $r < 0$.

Prodotto scalare, in coordinate rispetto a versori orogonali Siano $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ due vettori in $\mathcal{V}_o^2$ aventi lunghezza 1 e fra loro ortogonali, cioè tali che

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Essendo $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ in particolare non allineati, si ha che ogni vettore in $\mathcal{V}_o^2$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$.

Un calcolo.

$$\begin{aligned} (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) \cdot (4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) &= 2 \times 4(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + 2 \times 5(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + 3 \times 4(\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + 3 \times 5(\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) \\ &= 2 \times 4 \times 1 + 2 \times 5 \times 0 + 3 \times 4 \times 0 + 3 \times 5 \times 1 \\ &= 2 \times 4 + 3 \times 5 = 23 \end{aligned}$$

Allo stesso modo si ottiene che il prodotto scalare di due vettori, espressi come combinazioni lineari di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, è la somma dei prodotti dei coefficienti corrispondenti:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = a_1b_1 + a_2b_2$$

Un calcolo - continuazione. I prodotti scalari fra i vettori $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ sono dati da

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 13, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 23, \quad \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 41$$

Dunque

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{13}, \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{41}, \quad \cos \widehat{\mathbf{ab}} = \frac{23}{\sqrt{13}\sqrt{41}}$$

Nello spazio euclideo. Tutto quanto detto nel caso del piano euclideo $\mathcal{E}^2$ e nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ si trasferice tale e quale nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$ e nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$, in quanto ciascuna nozione, costruzione, proposizione si riferisce a due semirette con la stessa origine e a due vettori applicati in uno stesso punto, e tali oggetti stanno su un piano.

Prodotto scalare, in coordinate rispetto a versori a due a due ortogonali Siano $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ tre vettori in $\mathcal{V}_o^3$ aventi lunghezza 1 e fra loro ortogonali, cioè tali che

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Essendo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ in particolare non complanari, si ha che ogni vettore in $\mathcal{V}_o^3$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Si ha che il prodotto scalare di due vettori, espressi come combinazioni lineari di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, è la somma dei prodotti dei coefficienti corrispondenti:

$$(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot (b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Applicazione In un cubo, l'angolo fra due diagonali corte uscenti da uno stesso vertice è $\pi/3$. (ci se ne può convincere osservando che le due diagonali corte sono lati di un triangolo che ha come terzo lato ancora una diagonale corta, che dunque è equilatero). Verifichiamo questa affermazione usando i prodotti scalari.

Siano O il vertice e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \in \mathcal{V}_o^3$ i vettori corrispondenti ai lati uscenti da O, in modo che $\mathbf{k}$ corrisponda al lato comune alle facce delle due diagonali. Le due diagonali si possono rappresentare come $\mathbf{f} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{g} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$. Si ha

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{i} + \mathbf{k}) = 2 \quad \mathbf{f} \cdot \mathbf{g} = (\mathbf{i} + \mathbf{k})(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 1 \quad \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = (\mathbf{j} + \mathbf{k})(\mathbf{j} + \mathbf{k}) = 2$$

Dunque

$$\|\mathbf{f}\| = \sqrt{2}, \quad \|\mathbf{g}\| = \sqrt{2}, \quad \cos \widehat{\mathbf{fg}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$