Lezione del 26.09; principali punti in dettaglio.

Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^2$. Con una scrittura come (a_1, a_2) si indica la "coppia ordinata" di "prima componente" a_1 e "seconda componente" a_2. Due coppie ordinate si dicono "uguali" se e solo se ciascuna componente di una coppia è uguale alla corrispondente componente dell'altra coppia. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie ordinate di numeri reali.

Si pone $\mathbf{0} = (0, 0)$; per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ si pone $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2)$. Si definisce la somma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ di due coppie ordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ come la coppia ordinata che ha ciascuna componente uguale alla somma delle rispettive componenti di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Si definisce il prodotto $r\mathbf{a}$ di un numero reale r per una coppia ordinata $\mathbf{a}$ come la coppia ordinata che ha ciascuna componente uguale al prodotto di r per la rispettiva componente di $\mathbf{a}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$

$$r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2).$$

Si verifica che l'insieme $\mathbb{R}^2$ dotato di queste due operazioni è uno spazio vettoriale reale; le coppie ordinate si dicono anche "vettori numerici 2-dimensionali" ed $\mathbb{R}^2$ si dice "spazio vettoriale numerico 2-dimensionale".
I vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ ed $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ si dicono "vettori canonici". Per ogni vettore (a_1, a_2) si ha

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = a_1(1, 0) + a_2(0, 1);$$

in altri termini: ogni vettore di $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ di $\mathbb{R}^2$; i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti di $\mathbf{a}$.

Problema. Il vettore $(5, 6)$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $(1, 2)$ e $(3, 4)$? Esplicitamente, l'equazione nelle incognite x, y in $\mathbb{R}$

$$x(1, 2) + y(3, 4) = (5, 6)$$

ha qualche soluzione?
Per la definizione delle operazioni sulle coppie ordinate, l'equazione si riscrive

$$(x + 3y, 2x + 4y) = (5, 6).$$

Per la definizione di uguaglianza fra coppie ordinate, questa equazione equivale al sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ 2x + 4y = 7 \end{cases}$$

Questo sistema ha l'unica soluzione $x = -1, y = 2$. Dunque $(5, 6)$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $(1, 2)$ e $3, 4)$, cioè

$$(-1)(1, 2) + 2(3, 4) = (5, 6).$$

Identificazione di $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$. Siano $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ due vettori geometrici fissati in $\mathcal{V}_o^2$, non allineati. Ciascun vettore geometrico in $\mathcal{V}_o^2$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$; tenendo conto solo dei coefficienti, si ottiene un vettore numerico in $\mathbb{R}^2$; si ha così una legge che ad ogni elemento di $\mathcal{V}_o^2$ associa uno ed un solo elemento di $\mathbb{R}^2$, cioè una funzione Γ di dominio $\mathcal{V}_0^2$ e codominio $\mathbb{R}^2$. Esplicitamente,

$$\Gamma : \mathcal{V}_0^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \Gamma(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) = (a_1, a_2).$$

Si noti che Γ manda i vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ nei vettori canonici $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$:

$\Gamma(\mathbf{i}) = \Gamma(1\mathbf{i} + 0\mathbf{j}) = (1, 0) = \mathbf{e}_1, \quad \Gamma(\mathbf{j}) = \Gamma(0\mathbf{i} + 1\mathbf{j}) = (0, 1) = \mathbf{e}_2.$

La funzione Γ ha le seguenti proprietà:

1- è una biiezione, cioè ciascun vettore numerico si ottiene da uno ed un solo vettore geometrico;

2- è compatibile con le operazioni di somma di vettori in $\mathcal{V}_0^2$ ed $\mathbb{R}^2$, cioè per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{V}_o^2$ si ha $\Gamma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Gamma(\mathbf{a}) + \Gamma(\mathbf{b})$;

3- Γ è compatibile con le operazioni di prodotto di numeri reali per vettori in $\mathcal{V}_0^2$ ed $\mathbb{R}^2$, cioè per ogni $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_o^2$ si ha $\Gamma(r\mathbf{a}) = r\Gamma(\mathbf{a})$.

In breve, riassumiamo la 2) e la 3) dicendo che Γ è compatibile con la struttura vettoriale di $\mathcal{V}_0^2$ ed $\mathbb{R}^2$.

Verifichiamo la 2). Poniamo $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$; da una parte si ha

$$\Gamma(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \Gamma(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = \Gamma((a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

dall'altra si ha

$$\Gamma(\mathbf{a}) + \Gamma(\mathbf{b}) = \Gamma(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + \Gamma(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2).$$

Tramite la biiezione Γ si può identificare lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$: si identificano vettori geometrici con vettori numerici e le operazioni sui vettori geometrici con le operazioni sui vettori numerici. Si può tradurre fedelmente ogni nozione ed ogni propoosizione espressi nel linguaggio degli spazi vettoriali dall'ambito dei vettori geometrici all'ambito dei vettori numerici e viceversa.

Esempio. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ abbiamo visto che $(5, 6)$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $(1, 2)$ e $3, 4)$, cioè

$$(-1)(1, 2) + 2(3, 4) = (5, 6).$$

Fissati due vettori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ nel piano, non allineati, si possono identificare i vettori numerici $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$ con i vettori geometrici $\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$, e $5\mathbf{i}+6\mathbf{j}$ e leggere l'uguaglianza di sopra come un asserto geometrico.

Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$. Con una scrittura come (a_1, a_2, a_3) si indica la "terna ordinata" di prima, seconda e terza "componente" rispettivamente a_1, a_2, a_3. Due terne ordinate si dicono "uguali" se e solo se ciascuna componente di una terna è uguale alla corrispondente componente dell'altra terna. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^3$ delle terne ordinate di numeri reali.

Si pone $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$; per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ si pone $-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$. Si definisce la somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ di due terne ordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ come la terna ordinata che ha ciascuna componente uguale alla somma delle rispettive componenti di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3).$$

Si definisce il prodotto $r\mathbf{a}$ di un numero reale r per una terna ordinata $\mathbf{a}$ come la terna ordinata che ha ciascuna componente uguale al prodotto di r per la rispettiva componenti di $\mathbf{a}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$r\mathbf{a} = (ra_1, ra_2, ra_3).$$

Si verifica che l'insieme $\mathbb{R}^3$ dotato di queste due operazioni è uno spazio vettoriale reale; le terne ordinate si dicono anche "vettori numerici 3-dimensionali" ed $\mathbb{R}^3$ si dice "spazio vettoriale numerico 3-dimensionale".
I vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, ed $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ si dicono "vettori canonici". Per ogni vettore (a_1, a_2, a_3) si ha

$$(a_1, a_2, a_3) = (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) = a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1);$$

in altri termini: ogni vettore $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ di $\mathbb{R}^3$; i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti di $\mathbf{a}$.

Identificazione di $\mathcal{V}_o^3$ con $\mathbb{R}^3$. Siano $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori geometrici fissati in $\mathcal{V}_o^3$, non allineati. Ciascun vettore geometrico in $\mathcal{V}_o^3$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare di $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; tenendo conto solo dei coefficienti, si ottiene un vettore numerico in $\mathbb{R}^3$; si ha così una funzione Γ di dominio $\mathcal{V}_0^3$ e codominio $\mathbb{R}^3$. Esplicitamente,

$$\Gamma : \mathcal{V}_0^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \Gamma(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) = (a_1, a_2, a_3).$$

Si noti che Γ manda i vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ nei vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned}
\Gamma(\mathbf{i}) &= \Gamma(1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = (1, 0, 0) = \mathbf{e}_1, \\
\Gamma(\mathbf{j}) &= \Gamma(0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}) = (0, 1, 0) = \mathbf{e}_2, \\
\Gamma(\mathbf{k}) &= \Gamma(0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}) = (0, 0, 1) = \mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

La funzione Γ ha le seguenti proprietà:

1- è una biiezione, cioè ogni vettore numerico si ottiene da uno ed un solo vettore geometrico;

2,3- è compatibile con la struttura vettoriale di $\mathcal{V}_0^3$ ed $\mathbb{R}^3$.

Tramite la biiezione Γ si può identificare lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$ con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$. Si può tradurre fedelmente ogni nozione ed ogni proposizione espressa nel linguaggio degli spazi vettoriali dall'ambito dei vettori geometrici all'ambito dei vettori numerici e viceversa.

Problema. Fissati nello spazio $\mathcal{E}^3$ un punto O e nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$ tre vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ non complanari, si identifichi $\mathcal{V}_o^3$ con $\mathbb{R}^3$. Il vettore $(1, 3, 9)$ sta sul piano dei vettori $(1, 1, 1)$ e $(1, 2, 4)$?

Il primo vettore sta sul piano degli altri due se e solo se si può scrivere come loro combinazione lineare, cioè se e solo se l'equazione nelle incognite x, y in $\mathbb{R}$

$$x(1, 1, 1) + y(1, 2, 4) = (1, 3, 9)$$

ha qualche soluzione. Questa equazione fra vettori 3-dimensionali equivale al sistema di 3 equazioni

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + 2y = 3 \\ x + 4y = 9 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ \phantom{x=1-{}} y = 2 \\ 3y = 8 \end{cases}$$

che non ha alcuna soluzione. Dunque il primo vettore non sta sul piano degli altri due.

Spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$. Sia n un intero positivo fissato. Con una scrittura come $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ o in breve $(a_i)_{i=1}^n$ si indica la "$n-$pla ordinata" di $i-$ma "componente" a_i per $i = 1, \ldots, n$. Due $n-$ple ordinate si dicono "uguali" se e solo se ciascuna componente di una $n-$pla è uguale alla corrispondente componente dell'altra $n-$pla. Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^n$ delle $n-$ple ordinate di numeri reali.

Si pone $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$; per ogni $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n$ si pone $-\mathbf{a} = (-a_i)_{i=1}^n$. Si definisce la somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ di due $n-$ple ordinate $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ come la $n-$pla ordinata che ha ciascuna componente uguale alla somma delle rispettive componenti di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n$ e $\mathbf{b} = (b_i)_{i=1}^n$

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_i + b_i)_{i=1}^n.$$

Si definisce il prodotto $r\mathbf{a}$ di un numero reale r per una $n-$pla ordinata $\mathbf{a}$ come la $n-$pla ordinata che ha ciascuna componente uguale al prodotto di r per la rispettiva componente di $\mathbf{a}$: per ogni $\mathbf{a} = (a_i)_{i=1}^n$

$$r\mathbf{a} = (ra_i)_{i=1}^n.$$

Si verifica che l'insieme $\mathbb{R}^n$ dotato di queste due operazioni è uno spazio vettoriale reale; le $n-$ple ordinate si dicono anche "vettori numerici $n-$dimensionali" ed $\mathbb{R}^n$ si dice "spazio vettoriale numerico $n-$dimensionale".
I vettori aventi una componente uguale ad 1 e le altre uguali a 0

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ \ldots, \ \mathbf{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

si dicono "vettori canonici". Per ogni vettore $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ si ha

$$\begin{aligned}(a_1, a_2, \dots, a_n) &= (a_1, 0, \dots, 0) + (0, a_2, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, a_n) \\ &= a_1(1, 0, \dots, 0) + a_2(0, 1, \dots, 0) + \cdots + a_n(0, 0, \dots, 1);\end{aligned}$$

in altri termini: ogni vettore di $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si può scrivere in uno ed un solo modo come combinazione lineare dei vettori canonici $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ di $\mathbb{R}^n$; i coefficienti della combinazione lineare sono le componenti di $\mathbf{a}$.

Approfondimento sulla dimensione. Ricordiamo la

Definizione. Dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$ di uno spazio vettoriale V si dicono "linearmente indipendenti" se l'equazione $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \cdots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ ha solo la soluzione $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = 0$. La dimensione $\dim(V)$ di V è il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V, qualora tale massimo esista, altrimenti è ∞.

Osservazione. Si ha $\dim(V) = n$ se e solo se
(1) in V esistono n vettori linearmente indipendenti e
(2) ogni $m > n$ vettori in V sono linermente dipendenti.
Si verifica che la seconda condizione equivale alla
(2') ogni $n + 1$ vettori in V sono linermente dipendenti.
Nello spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^3$ abbiamo visto che: due vettori sono linearmente indipendenti se e solo se non sono allineati; tre vettori sono linearmente indipendenti se e solo se sono non complanari; quattro vettori sono sempre linearmente dipendenti. Dunque, anche secondo la definizione di dimensione sopra data si ha che $\mathcal{V}_o^1$, $\mathcal{V}_o^2$ $\mathcal{V}_o^3$ hanno dimensione rispettivamente 1, 2, 3.

Gli spazi vettoriali geometrici $\mathcal{V}_o^1, \mathcal{V}_o^2, \mathcal{V}_o^3$ sono identificati con gli spazi vettoriali numerici $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, dunque anche questi hanno dimensioni rispettivamente 1,2,3.

Vale la pena di vedere esplicitamente cosa questo significhi in termini numerici.

Dire che $\mathbb{R}^2$ ha dimensione 2 significa dire che:
(1) in $\mathbb{R}^2$ esistono 2 vettori linearmente indipendenti e
(2') ogni 3 vettori in $\mathbb{R}^2$ sono linermente dipendenti.
La prima affermazione è ovvia: basta prendere $(1, 0)$ e $(0, 1)$. La seconda affermazione non è ovvia: significa che per ogni $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ in $\mathbb{R}^2$ l'equazione

$$x(a_1, a_2) + y(b_1, b_2) + z(c_1, c_2) = (0, 0)$$

ha qualche soluzione diversa da $x = y = z = 0$. Esplicitamente: ogni sistema di 2 equazioni in 3 incognite del tipo

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

ha qualche soluzione diversa da $x = y = z = 0$.

Dire che $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 3 significa dire che:
(1) in $\mathbb{R}^3$ esistono 3 vettori linearmente indipendenti e
(2') ogni 4 vettori in $\mathbb{R}^3$ sono linermente dipendenti.

La prima affermazione è ovvia: basta prendere $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. La seconda affermazione non è ovvia: significa che per ogni (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3), (c_1,c_2,c_3), (d_1,d_2,d_3), in $\mathbb{R}^3$ l'equazione

$$x(a_1,a_2,a_3)+y(b_1,b_2,b_3)+z(c_1,c_2,c_3)+t(d_1,d_2,d_3)=(0,0,0)$$

ha qualche soluzione diversa da $x=y=z=t=0$. Esplicitamente: ogni sistema di 3 equazioni in 4 incognite del tipo

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1t=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2t=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z+d_3t=0 \end{cases}$$

ha qualche soluzione diversa da $x=y=z=t=0$.

Vedremo più avanti che per ogni intero positivo fissato n, lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ ha dimensione n. Certamente in $\mathbb{R}^n$ esistono n vettori linearmente indipendenti, ad esempio i vettori canonici $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n$. Ciò che non è ovvio è che ogni $n+1$ vettori di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente dipendenti. Proveremo questa affermazione più avanti dopo avere sviluppato un poco la teoria dei sistemi lineari.

Sistemi di equazioni lineari; 2 equazioni in 2 incognite Un sistema di due equazioni lineari in due incognite x,y è un sistema di equazioni del tipo

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

dove i coefficienti a_1,b_1,a_2,b_2 e i termini noti c_1,c_2 sono costanti in $\mathbb{R}$.

I coefficienti e i termini noti delle equazioni possono essere organizzati nella tabella con 2 righe e 3 colonne, o matrice 2×3

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{array}\right].$$

Ci poniamo le seguenti domande:
1) sotto quali condizioni il sistema ha una ed una sola soluzione?
2) c'è una formula generale per la soluzione?

Esempio 1. Il sistema

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione: $x=-1$, $y=2$.

Esempio 2. Il sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=7 \end{cases}$$

non ha alcuna soluzione, in quanto $2x+3y=5$ implica $4x+6y=10$ che è incompatibile con $4x+6y=7$. Interpretazione vettoriale: il sistema è equivalente all'equazione

$$x(2,4)+y(3,6)=(5,7);$$

$(2,4)$ e $(3,6)$ stanno su una stessa retta, ma $(5,7)$ non sta sulla retta; $x(2,4)+y(3,6)$ sta sulla retta per ogni valore di x, y, dunque non può mai essere uguale a $(5,7)$.

Esempio 3. Il sistema

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 4x+6y=10 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni, in quanto il sistema è equivalente all'unica equazione $2x+3y=5$.

Definizione. Il determinante di una matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

di numeri reali a, b, c, d è il numero reale

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - cb.$$

Esempi.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = 1\cdot 4 - 2\cdot 3 = -2.$$
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 2\cdot 6 - 4\cdot 3 = 0.$$

Interpretazione geometrica. Fissati due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di lunghezza 1 fra loro ortogonali, identifichiamo $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$. Allora

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \quad \text{area con segno del parallelogramma su } \ \mathbf{a} = (a_1, a_2) \text{ e } \mathbf{b} = (b_1, b_2)$$

Il segno viene preso positivo o negativo secondo che la coppia ordinata di vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e la coppia ordinata di vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ abbiano "orientamento" uguale od opposto. Questo concetto verrà ripreso nella prossima lezione.