Lezione del 02.10; principali punti in dettaglio.

Determinanti di matrici 2×2.

Così come si hanno le coppie ordinate di numeri reali $(a_1, a_2) = \mathbf{a}$, su cui sono definite componente per componente la somma $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ed il prodotto per scalari $r\mathbf{a}$ che rendono il loro insieme $\mathbb{R}^2$ uno spazio vettoriale, si hanno:

-le righe di due numeri reali $[a_1\ a_2] = \mathbf{a}$ o vettori 1×2, su cui sono definite componente per componente la somma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ed il prodotto per scalari $r\mathbf{a}$ che rendono il loro insieme $\mathbb{R}^{1\times 2}$ uno spazio vettoriale;

-le colonne di due numeri reali $\left[\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{a}$ o vettori 2×1, su cui sono definite componente per componente la somma $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ ed il prodotto per scalari $\mathbf{a}r$ che rendono il loro insieme $\mathbb{R}^{2\times 1}$ uno spazio vettoriale.

Fra due qualsiasi degli insiemi $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^{1\times 2}$, $\mathbb{R}^{2\times 1}$ c'è un'ovvia biiezione, compatibile con la struttura di spazio vettoriale. Si scrive il prodotto per scalari mettendo gli scalari a sinistra dei vettori riga e a destra dei vettori colonna, anche se spesso si deroga a questa convenzione.

Si hanno inoltre le matrici con due righe e due colonne di numeri reali o matrici di tipo 2×2 o in breve matrici 2×2

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

il cui insieme si indica con $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Ciascuna matrice 2×2 si può vedere come una colonna di vettori riga o, meglio per i nostri scopi, come una riga di vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}], \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}\ 2 \times 1.$$

Di seguito mostriamo come siano utili i vettori colonna per descrivere sistemi lineari e determinanti.

Sistemi lineari. Ciascun sistema di due equazioni lineari in due incognite x, y

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

si può scrivere come un'unica equazione fra vettori 2×1 nelle incognite x, y

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

in breve

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ 2 \times 1.$$

Determinanti. Il determinante di una matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$$

è il numero reale definito da

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

ed ha il seguente significato geometrico.

Proposizione. Siano fissati in $\mathcal{E}^2$ un punto O e in $\mathcal{V}_o^2$ due vettori i, j di lunghezza 1 fra loro ortogonali e tramite questi vettori si identifichi $\mathbb{R}^{2\times 1}$ con $\mathcal{V}_o^2$. Allora il valore assoluto del determinante di una matrice 2×2 è uguale all'area del parallelogramma sui suoi vettori colonna; in simboli:

$$|\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}]| = \ Area(\mathbf{a}, \mathbf{b});$$

in particolare, il determinante è nullo se e solo se i due vettori colonna sono allineati.

Il determinante di matrici 2×2 è una funzione $\det : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ che, identificando le matrici con coppie di vettori colonna, può essere visto come una funzione

$$\det : \mathbb{R}^{2\times 1} \times \mathbb{R}^{2\times 1} \to \mathbb{R}.$$

Possiede, anzi è caratterizzato, dalle seguenti

Proprietà.

$$\begin{array}{ll}
(1.1) & \det [\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}] = \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \det [\mathbf{c}, \mathbf{b}] \\
(1.2) & \det [\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}] = \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + \det [\mathbf{a}, \mathbf{c}] \\
(2.1) & \det [r\mathbf{a}, \mathbf{b}] = r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \\
(2.2) & \det [\mathbf{a}, r\mathbf{b}] = r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \\
(3) & \text{se } \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ allora } \quad \det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0 \\
(4) & \det [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 1
\end{array}$$

Il complesso delle proprietà (1.1),(1.2),(2.1),(2.2) si dice "bilinearità"; la proprietà (3) si dice "alternanza".

Tutte queste proprietà si verificano facilmente.
Esempio per la (2.1):

$$\det [r\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \det \begin{bmatrix} ra_1 & b_1 \\ ra_2 & b_2 \end{bmatrix} = ra_1 b_2 - ra_2 b_1;$$

$$r\det [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = r\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = r(a_1 b_2 - a_2 b_1);$$

i due risultati sono uguali, per la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma in $\mathbb{R}$.
Esempio per la (3):

$$\det [\mathbf{a}, \mathbf{a}] = \det \begin{bmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0,$$

per la proprietà commutativa del prodotto in $\mathbb{R}$.

Proposizione. Si identifichi $\mathbb{R}^{2\times 1}$ con $\mathcal{V}_o^2$, tramite due vettori in $\mathcal{V}_o^2$ di lunghezza 1 fra loro ortogonali. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vettori 2×1 le seguenti affermazioni son equivalenti:
(1) $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ sono allineati;
(2) $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = 0$.

Proviamo solo che la (1) implica la (2) e lo proviamo solo nel caso non banale in cui $\mathbf{a} \neq 0$. Da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ allineati e $\mathbf{a} \neq 0$ segue che $\mathbf{b} = r\mathbf{a}$ per qualche $r \in \mathbb{R}$; dunque

$$\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \det[\mathbf{a}, r\mathbf{a}] = r\det[\mathbf{a}, \mathbf{a}] = r \cdot 0 = 0$$

(abbiamo usato la propr. (2.2) e (3)).

Proposizione. Un sistema di due equazioni lineari in due incognite

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}, \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\ 2 \times 1$$

ha una ed una sola soluzione se e solo se $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ e in tal caso la soluzione è data da

$$x = \frac{\det[\mathbf{c}, \mathbf{b}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}$$
$$y = \frac{\det[\mathbf{a}, \mathbf{c}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}.$$

Esempio. E dato il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 11x + 13y = 7 \end{cases}$$

Si ha

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 13 \end{bmatrix} = 26 - 33 = -7 \neq 0,$$

dunque il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 13 \end{bmatrix}}{-7} = \frac{65 - 21}{-7} = -\frac{44}{7}$$
$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}}{-7} = \frac{14 - 55}{-7} = \frac{41}{7}.$$

Esempio. E dato il sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 11x + ky = 7 \end{cases}$$

dove k è un parametro in $\mathbb{R}$. Si ha

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 11 & k \end{bmatrix} = 2k - 33 = 0 \quad \text{se e solo se} \quad k = 33/2;$$

dunque il sistema ha una ed una sola soluzione se e solo se $k \neq 33/2$.

Commento alla Prop. Se $\det[\mathbf{a},\ \mathbf{b}] \neq 0$ e se il sistema ha qualche soluzione, allora l'incognita x deve essere data dalla formula di sopra. L'uguaglianza $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c}$ implica l'uguaglianza

$$\det[\mathbf{a}x + \mathbf{b}y, \mathbf{b}] = \det[\mathbf{c}, \mathbf{b}] .$$

Il primo membro, per le proprietà del determinante è

$$\det[\mathbf{a}x + \mathbf{b}y, \mathbf{b}] = x\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + y\det[\mathbf{b}, \mathbf{b}] = x\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] .$$

Dunque si ha l'uguaglianza

$$x\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \det[\mathbf{c}, \mathbf{b}] .$$

Dall'ipotesi $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq 0$ segue

$$x = \frac{\det[\mathbf{c}, \mathbf{b}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}.$$

Determinanti di matrici 3×3.
Consideriamo le colonne di 3 numeri reali o vettori 3×1 con la somma e il prodotto per scalari definiti componente per componente che rendono il loro insieme $\mathbb{R}^{3\times 1}$ uno spazio vettoriale, e consideriamo le matrici con 3 righe e 3 colonne di numeri reali o matrici 3×3 e il loro insieme $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

Il determinante delle matrici 3×3 si può definire in vari modi equivalenti, di seguito ne mostriamo tre. In ciascuna definizione si usa il fatto che ad ogni elemento della matrice si può associare un determinante 2×2, quello della matrice ottenuta cancellando la riga e la colonna dell'elemento. Illustriamo le definizioni sull'esempio della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

Definizione del determinante secondo la prima colonna: somma algebrica, con segni +, -, +, dei prodotti del 1°, 2°, 3° elemento della prima colonna per il rispettivo determinante 2×2

$$\det(A) = +2\det\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + 4\det\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} = 2(-9) - 3(-11) + 4(-3) = 3$$

Definizione del determinante secondo la seconda colonna: somma algebrica, con segni -, +, -, dei prodotti del 1°, 2°, 3° elemento della seconda colonna per il rispettivo determinante 2×2

$$\det(A) = -5\det\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + 6\det\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} - 7\det\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} = -5(-9) + 6(-14) - 7(-6) = 3$$

Definizione del determinante secondo la terza colonna: somma algebrica, con segni +, -, +, dei prodotti del 1°, 2°, 3° elemento della terza colonna per il rispettivo determinante 2×2 ...

Ciascuna matrice 3×3 si può vedere come una riga di vettori colonna

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}], \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \; 3 \times 1.$$

Proposizione. Siano fissati in $\mathcal{E}^3$ un punto O e in $\mathcal{V}_o^3$ tre vettori i, j, k di lunghezza 1 fra loro ortogonali e tramite questi vettori si identifichi $\mathbb{R}^{3\times 1}$ con $\mathcal{V}_o^3$. Il valore assoluto del determinante di una matrice 3×3 è uguale al volume del parallelepipedo sui suoi vettori colonna; in simboli:

$$|\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = \; Vol(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c});$$

in particolare, il determinante è nullo se e solo se i tre vettori colonna sono complanari.

Il determinante di matrici 3×3 è una funzione $\det : \mathbb{R}^{3\times 3} \to \mathbb{R}$ che, identificando le matrici con terne di vettori colonna, può essere visto come una funzione

$$\det : \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}.$$

Possiede, anzi è caratterizzato, dalle seguenti

Proprietà.

$$\begin{array}{ll}
(1.1) & \det[\mathbf{a}+\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\
(1.2) & \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}+\mathbf{d}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + \det[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}] \\
(1.3) & \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}+\mathbf{d}] = \cdots \\
(2.1) & \det[r\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = r\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\
(2.2) & \det[\mathbf{a}, r\mathbf{b}, \mathbf{c}] = r\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \\
(2.3) & \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, r\mathbf{c}] = \cdots \\
(3) & \text{se due fra } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ coincidono, allora} \quad \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0 \\
(4) & \det[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] = 1
\end{array}$$

Il complesso delle proprietà (1.1),(1.2),(1.3),(2.1),(2.2),(2,3) si dice "trilinearità"; la proprietà (3) si dice "alternanza".

Proposizione. Si identifichi $\mathbb{R}^{3\times 1}$ con $\mathcal{V}_o^3$, tramite tre vettori in $\mathcal{V}_o^3$ di lunghezza 1 fra loro ortogonali. Per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vettori 3×1 le seguenti affermazioni son equivalenti:
(1) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sono complanari;
(2) $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$.

Proviamo solo che la (1) implica la (2) e lo proviamo solo nel caso non banale in cui $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ non siano allineati. Da $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ complanari e $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ non allineati segue che $\mathbf{c} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ per qualche $r, s \in \mathbb{R}$; dunque

$$\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, r\mathbf{a} + s\mathbf{b}] = r\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}] + s\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}] = r \cdot 0 + s \cdot 0 = 0$$

(abbiamo usato la propr. (2.3) e (3)).

Ciascun sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite x, y, z

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$$

si può scrivere come un'unica equazione fra vettori 3×1 nelle incognite x, y, z

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix},$$

in breve

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = \mathbf{d} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \ 3 \times 1.$$

Proposizione. Un sistema di 3 equazioni lineari in 3 incognite

$$\mathbf{a}x + \mathbf{b}y + \mathbf{c}z = \mathbf{d} \qquad \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \ 3 \times 1,$$

ha una ed una sola soluzione se e solo se $\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] \neq 0$ e in tal caso la soluzione è data da

$$x = \frac{\det[\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}$$
$$y = \frac{\det[\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{c}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}$$
$$z = \frac{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]}{\det[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]}.$$

Determinanti $n \times n$.

Sia n un intero positivo fissato. Consideriamo le colonne di n numeri reali o vettori $n \times 1$ con la somma e il prodotto per scalari definiti componente per componente che rendono il loro insieme $\mathbb{R}^{n\times 1}$ uno spazio vettoriale e consideriamo le matrici con n righe ed n colonne di numeri reali o matrici $n \times n$ e il loro insieme $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Teorema. Esiste una ed una sola funzione "determinante"

$$\det : \mathbb{R}^{n\times 1} \times \mathbb{R}^{n\times 1} \cdots \times \mathbb{R}^{n\times 1} \to \mathbb{R},$$

che possiede le seguenti proprietà:
(1)(2) $n-$linearità;
(3) alternanza;
(4) $\det[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n] = 1$.

Teorema. n vettori $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ in $\mathbb{R}^{n\times 1}$ sono linearmente indipendenti se e solo se

$$\det[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n] \neq 0.$$