**Lezione del 10.10; principali punti in dettaglio.**

$\mathcal{E}^2, \mathcal{V}_o^2, \mathbb{R}^2$.

Siano O un punto in $\mathcal{E}^2$ e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base di $\mathcal{V}_o^2$.

Si hanno due biiezioni:
una $\mathcal{E}^2 \to \mathcal{V}_o^2$ definita da $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{OP}$;
una $\mathcal{V}_o^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathbf{v} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ se e solo se $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
si dice che OP è il "vettore posizione" di P rispetto ad O e $x, y$ sono le "coordinate" di $\mathbf{v}$ rispetto ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ (termine già introdotto in precedenza).

Componendo queste biiezioni, si ha una biiezione
$\mathcal{E}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\mathrm{P} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ se e solo se $\mathrm{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$;
si dice che $x, y$ sono le "coordinate" di P rispetto al "sistema di riferimento" $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Così come si identifica $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$ identificando ogni vettore con le sue coordinate rispetto ad $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, allo stesso modo si identifica $\mathcal{E}^2$ con $\mathbb{R}^2$ identificando ogni punto con le sue coordinate rispetto ad $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

*Fatto.* Ogni vettore è equivalente alla differenza di due vettori applicati in O, i vettori posizione del punto finale e del punto iniziale; in simboli: per ogni vettore PQ

$$\mathrm{PQ} \sim \mathrm{OQ} - \mathrm{OP}$$

*Commento.* Consideriamo il caso in cui P e Q non sono allineati con O. Se $\mathrm{OQ}'$ è il vettore applicato in O equivalente a PQ, allora per la definizione di somma di vettori applicati in O si ha

$$\mathrm{OQ}' + \mathrm{OP} = \mathrm{OQ}, \quad \text{da cui} \quad \mathrm{OQ}' = \mathrm{OQ} - \mathrm{OP}.$$

**Equazioni parametriche di rette.**
Sia data una retta $r$ in $\mathcal{E}^2$. Fissati un punto $\mathrm{P}_0 \in r$ ed un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^2$ parallelo ad $r$, per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^2$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in r \quad & \text{se e solo se} \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \parallel \mathbf{v} \\ & \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0 = t\mathbf{v} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R} \\ & \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^2$ ed un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^2$, il sottinsieme $r$ di $\mathcal{E}^2$ definito da questa condizione è una retta, che passa per $\mathrm{P}_0$ ed è parallela al vettore $\mathbf{v}$.
Si dice che

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v}$$

è la "equazione parametrica" della retta per $\mathrm{P}_0$ con "vettore direttore" $\mathbf{v}$.

Identificati $\mathcal{E}^2$ e $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$ mediante una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, per la compatibilità della identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, questi fatti e nozioni si traducono come segue.

Sia data una retta $r$ in $\mathcal{E}^2$. Fissati un punto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in r$ ed un vettore non nullo $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{V}_o^2$ parallelo ad $r$, per ogni punto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{E}^2$ si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, dati un punto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}^2$ ed un vettore non nullo $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{V}_o^2$, il sottinsieme $r$ di $\mathcal{E}^2$ definito da questa condizione è una retta, che passa per il punto ed è parallela al vettore.
Si dice che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

è la "equazione parametrica" della retta per $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ con "vettore direttore" $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Questa equazione è equivalente al "sistema parametrico" delle due equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

*Esempio.* La retta $r$ per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con vettore direttore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ha equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}$$

Il punto $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ sta su $r$ se e solo se

$$\begin{cases} 5 = 1 + t \\ 6 = 1 + 2t \end{cases}, \qquad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Ciò è impossibile. Dunque il punto $\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ non sta su $r$.

*Interpretazione cinematica.* Una equazione parametrica descrive una retta come "traiettoria" di un "punto materiale" che si trova in un dato punto al tempo $t = 0$ e si muove con una dato vettore "velocità" costante.

> *Convenzione.* Intendiamo la relazione di parallelismo fra rette in senso debole, ammettiamo cioè come rette parallele anche due rette coincidenti.

*Proposizione.* Sono date le rette di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad r' : \begin{cases} x = x_0' + a't \\ y = y_0' + b't \end{cases} \qquad \left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}\right).$$

(1) $r \parallel r'$ se e solo se $\exists\ s \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$;

(2) $r = r'$ se solo se $r \parallel r'$ e $\begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{bmatrix} \in r$;

(3) $r \perp r'$ se e solo se $\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a'a + b'b = 0$.

*Commento.* La proposizione deriva direttamente dal fatto che il vettore dei coefficienti del parametro è un vettore direttore della retta.

*Esempio.* Le rette di equazioni parametriche

$$r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases}, \quad r': \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 2 + t \end{cases}$$

hanno vettori direttori $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ che non sono uno multiplo reale dell'altro, dunque $r$ ed $r'$ non sono parallele e si intersecano in un punto.
Un punto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ appartiene sia ad $r$ che ad $r'$ se e solo se

$$\exists\, t \in \mathbb{R}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \quad \text{ed} \quad \exists\, s \in \mathbb{R}: \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 2 + s \end{cases}$$

Da questi due sistemi si ottiene il sistema in $s, t$

$$\begin{cases} t - 2s = 1 \\ 2t - s = 1 \end{cases}$$

Questo sistema ha una ed una sola soluzione; il valore di $t$ è dato da

$$t = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{3}.$$

Sostituendo questo valore di $t$ nella rispettiva equazione parametrica si ha

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ y = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Il punto di intersezione delle due rette è $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{bmatrix}$.

*Interpretazione cinematica.* La retta $r$ è la traiettoria di un punto materiale che all'istante $t = 0$ si trova nel punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e si muove con velocità costante spostandosi del vettore $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ogni unità di tempo; il punto materiale si trova sul punto di intersezione fra $r$ ed $r'$ all'istante $t = \frac{1}{3}$.

**Equazioni cartesiane di rette.**
Sia data una retta $r$ in $\mathcal{E}^2$. Fissati un punto $\mathrm{P}_0 \in r$ ed un vettore non nullo $\mathbf{n} \in \mathcal{V}_o^2$ ortogonale ad $r$, per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^2$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in r \quad & \text{se e solo se} \quad \mathrm{P_0P} \perp \mathbf{n} \\ & \text{se e solo se} \quad (\mathrm{OP} - \mathrm{OP_0}) \cdot \mathbf{n} = 0 \\ & \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{OP_0} \cdot \mathbf{n} \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{OP_0} \cdot \mathbf{n}.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^2$ ed un vettore non nullo $\mathbf{n} \in \mathcal{V}_o^2$, il sottinsieme $r$ di $\mathcal{E}^2$ definito da questa condizione è una retta, che passa per $\mathrm{P}_0$ ed è ortogonale a $\mathbf{n}$.
Si dice che

$$\mathrm{OP} \cdot \mathbf{n} = \mathrm{OP}_0 \cdot \mathbf{n}$$

è la "equazione cartesiana" della retta per $\mathrm{P}_0$ con "vettore normale" $\mathbf{n}$.

Identificati $\mathcal{E}^2$ e $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$ mediante una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, per la compatibilità dell'identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori, di prodotto di scalari per vettori, e di prodotto scalare di vettori, questi fatti e nozioni si traducono come segue.

Sia data una retta $r$ in $\mathcal{E}^2$. Fissati un punto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in r$ ed un vettore non nullo $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{V}_o^2$ ortogonale ad $r$, per ogni punto $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathcal{E}^2$ si ha

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\text{cioè} \quad ax + by = ax_0 + by_0.$$

Viceversa, dati un punto $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \in \mathcal{E}^2$ ed un vettore non nullo $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathcal{V}_o^2$, il sottinsieme $r$ di $\mathcal{E}^2$ definito da questa condizione è una retta, che passa per il punto ed è ortogonale al vettore.
Le equazioni cartesiane delle rette del piano sono tutte e sole le equazioni lineari in due incognite

$$ax + by = c,$$

con i coefficienti delle incognite non entrambi 0; questi coefficienti sono le componenti di un vettore normale alla retta.

*Esempio.* La retta $r$ per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ con vettore normale $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{cioè} \quad 2x + y = 4.$$

*Proposizione.* Sono date le rette di equazioni cartesiane

$$r: \ ax + by = c \quad r': \ a'x + b'y = c' \qquad ((a,b),(a',b') \neq \mathbf{0}).$$

(1) $r \parallel r'$ se e solo se $\exists\ s \in \mathbb{R} : (a', b') = s(a, b)$;
(2) $r = r'$ se solo se $\exists\ s \in \mathbb{R} : (a', b', c') = s(a, b, c)$;
(3) $r \perp r'$ se e solo se $(a', b') \cdot (a, b) = a'a + b'b = 0$.

*Commento.* La proposizione deriva direttamente dal fatto che il vettore dei coefficienti delle incognite è un vettore normale della retta.

*Esempio.* Le rette di equazioni cartesiane

$$r: \ 2x + y = 4, \quad r': \ 3x + y = 9$$

hanno vettori normali $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ che non sono proporzionali, dunque non sono parallele e si intersecano in un punto.

Il punto di intersezione delle due rette è la soluzione del sistema delle equazioni delle rette

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Questa soluzione si può ottenere ad esempio come

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} = 5 \quad y = \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}} = -6$$

Il punto di intersezione delle due rette è $\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -6 \end{smallmatrix}\right]$.

**Equazioni parametriche e cartesiane**
*Proposizione.* Sono date le rette

$$r: \; ax + by = c \quad r': \begin{cases} x = x'_0 + a't \\ y = y'_0 + b't \end{cases} \qquad (\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}).$$

(1) $r \parallel r'$ se e solo se $a'a + b'b = 0$;
(2) $r = r'$ se solo se $r \parallel r'$ e ...
(3) $r \perp r'$ se e solo se $\exists\, s \in \mathbb{R} : \left[\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix}\right] = s \left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$;

*Commento.* Queste affermazioni seguono direttamente dal fatto che il vettore $\left[\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right]$ è ortogonale ad $r$ e il vettore $\left[\begin{smallmatrix} a' \\ b' \end{smallmatrix}\right]$ è parallelo ad $r'$.

*Esercizio.* Determinare il punto $\mathrm{P}'_0$ proiezione ortogonale del punto $\mathrm{P}_0 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ sulla retta $r: \; 2x + 3y = 5$.

La retta $r'$ passante per $\mathrm{P}_0$ ed ortogonale ad $r$ è rappresentata dall'equazione parametrica

$$r': \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$$

Il punto $\mathrm{P}'_0$ è l'intersezione delle rette $r$ ed $r'$. Sostituendo nell'equazione cartesiana le espressioni della $x, y$ date dall'equazione parametrica si ottiene l'equazione

$$2(3 + 2t) + 3(2 + 3t) = 5, \quad 13t = -7 \quad t = -\frac{7}{13}$$

risostituendo nell'equazione parametrica si ottiene

$$\begin{cases} x = 3 + 2\,\frac{-7}{13} = \frac{25}{26} \\ y = 2 + 3\,\frac{-7}{13} = \frac{5}{26} \end{cases}$$

Dunque $\mathrm{P}'_0 = \left[\begin{smallmatrix} \frac{25}{26} \\ \frac{5}{26} \end{smallmatrix}\right]$.

*Passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane e viceversa.* Da un'equazione parametrica di una retta si può ottenere un'equazione cartesiana della retta, risolvendo una delle due equazioni rispetto al parametro e sostituendo il risultato nell'altra.

*Esempio.* E' data l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 + 5t \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene

$t = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

e sostituendo nella seconda equazione si ottiene l'equazione cartesiana

$y = 4 + 5(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}), \quad \text{cioè} \quad \frac{5}{3}x - y = -\frac{2}{3}$

(Si può verificare che le due equazioni rappresentano la stessa retta verificando che il punto $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ soddisfa l'equazione cartesiana e che il vettore $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ è ortogonale al vettore $\begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ -1 \end{bmatrix}$.)

Da un'equazione cartesiana di una retta si può ottenere un'equazione parametrica della retta, ponendo una delle due incognite uguali ad un parametro e risolvendo rispetto all'altra incognita.

*Esempio.* E' data l'equazione cartesiana

$2x + 3y = 4$

Ponendo $x = t$ e risolvendo rispetto ad $y$ si ottiene l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases}$$

(Si lascia al lettore di verificare che le due equazioni rappresentano la stessa retta.)