Lezione del 10.16; principali punti in dettaglio.

$\mathcal{E}^3, \mathcal{V}_o^3, \mathbb{R}^3$.

Siano O un punto in $\mathcal{E}^3$ e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base ortonormale di $\mathcal{V}_o^3$.

Si hanno due biiezioni:

> $\mathcal{E}^3 \to \mathcal{V}_o^3$, $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{OP}$ (manda P nel vettore posizione di P rispetto ad O);
>
> $\mathcal{V}_o^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{v} \mapsto (x, y, z)$ tale che $\mathbf{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (manda $\mathbf{v}$ nella terna delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$); questa biiezione è compatibile con le operazioni di somma di vettori, di prodotto di scalari per vettori e di prodotto scalare di vettori.

Componendo queste biiezioni, si ha una biiezione

> $\mathcal{E}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{P} \mapsto (x, y, z)$ tale che $\mathrm{OP} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (manda P nella terna delle "coordinate" di P rispetto al "sistema di riferimento" $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$).

Di regola (non sempre) $\mathbb{R}^3$ viene identificato con $\mathbb{R}^{3\times 1}$, identificando (x, y, z) con $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$; questa identificazione è compatibile con tutte le operazioni definite sui due insiemi.

Come si identifica $\mathcal{V}_o^3$ con $\mathbb{R}^3$ e con $\mathbb{R}^{3\times 1}$ allo stesso modo si identifica $\mathcal{E}^3$ con $\mathbb{R}^3$ e con $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Così ad esempio il punto P tale che $\mathrm{OP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ si identifica con la terna $(2, 3, 4)$ e di regola con la colonna $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Equazioni parametriche di rette.

Sia data una retta r in $\mathcal{E}^3$ e sia r_0 la retta per O parallela ad r. Sia $\mathbf{v}$ un vettore non nullo applicato in O che sta su r_o (un "vettore direttore" di r) e sia P_0 un punto su r. Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^3$ le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in r; \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \text{ sta su } r; \quad & (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \text{ sta su } r_0; \\ & \mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0 = t\mathbf{v} \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}; \\ & \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v} \text{ per qualche } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v} \text{ per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^3$ ed un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^3$, il sottinsieme r di $\mathcal{E}^3$ definito da questa condizione è una retta, che passa per P_0 ed è parallela alla retta individuata dal vettore $\mathbf{v}$. Si dice che

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + t\mathbf{v}$$

è la "equazione parametrica" della retta per P_0 con vettore direttore $\mathbf{v}$.

Identificati i punti P e P_0 ed il vettore $\mathbf{v}$ con le terne delle loro coordinate

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

per la compatibilità della identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, l'equazione parametrica fra vettori geometrici diviene l'equazione parametrica fra vettori numerici

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

che equivale al sistema parametrico delle 3 equazioni

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}.$$

Retta per due punti. Se r è la retta individuata da due punti distinti P_1 e P_2, allora il vettore applicato in O equivalente al vettore $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, coè il vettore $\mathrm{OP}_2 - \mathrm{OP}_1$, è un vettore direttore di r. Dunque r ha l'equazione parametrica

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_1 + t(\mathrm{OP}_2 - \mathrm{OP}_1).$$

Esempio. La retta per i punti $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ha equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 2-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases}.$$

Equazioni parametriche di piani.

Sia dato un piano π in $\mathcal{E}^3$ e sia π_0 il piano per O parallelo a π. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ due vettori non allineati applicati in O che stanno su π_0 (due "vettori giacitura" di π) e sia P_0 un punto su π. Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^3$ le seguenti condizioni son equivalenti

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in \pi; \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \text{ sta su } \pi; \quad & (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \text{ sta su } \pi_0; \\ & \mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0 = s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \text{ per qualche } s, t \in \mathbb{R}; \\ & \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \text{ per qualche } s, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in \pi \quad \text{se e solo se} \quad \mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 \text{ per qualche } s, t \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^3$ e due vettori non allineati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_o^3$, il sottinsieme π di $\mathcal{E}^3$ definito da questa condizione è un piano, che passa per P_0 ed è parallelo al piano individuata dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Si dice che

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_0 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2$$

è la "equazione parametrica" del piano per P_0 con vettori giacitura $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$.

Identificati i punti P e P_0 ed i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ con le terne delle loro coordinate

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

per la compatibilità della identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto di scalari per vettori, l'equazione parametrica fra vettori geometrici diviene l'equazione parametrica fra vettori numerici

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

che equivale al sistema di 3 equazioni in 2 parametri

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 s + a_2 t \\ y = y_0 + b_1 s + b_2 t \\ z = z_0 + c_1 s + c_2 t \end{cases}.$$

Piano per tre punti. Se π è il piano individuato da tre punti non allineati $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$, allora i vettori applicati in O equivalenti ai vettori $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ e $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$, cioè i vettori $\mathrm{OP}_2 - \mathrm{OP}_1$ e $\mathrm{OP}_3 - \mathrm{OP}_1$ sono vettori giacitura di π. Dunque π ha l'equazione parametrica

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OP}_1 + s(\mathrm{OP}_2 - \mathrm{OP}_1) + t(\mathrm{OP}_3 - \mathrm{OP}_1).$$

Esempio. I tre punti $\mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathrm{P}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ non sono allineati. Il piano per questi tre punti ha equazione parametrica

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2-0 \\ 2-1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3-1 \\ 3-0 \\ 0-1 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} x = 1 - s + 2t \\ y = 2s + 3t \\ z = 1 + s - t \end{cases}.$$

Ortogonalità.

La definizione di ortogonalità fra due rette nel piano si estende a due rette nello spazio, dicendo che due rette r ed s son ortogonali se e solo se le rette r' ed s' parallele ad r ed s passanti per un fissato punto dello spazio sono ortogonali (si prova che la scelta del punto è irrilevante).

Si dice che una retta r è ortogonale ad un piano π se e solo se r è ortogonale a ciascuna retta s su π; si prova che ciò capita se e solo se r è ortogonale a due rette distinte su π.

Si prova che: per ogni piano ed ogni punto, esiste una ed una sola retta per il punto che è ortogonale al piano; per ogni retta ed ogni punto, esiste uno ed un solo piano per il punto che è ortogonale alla retta.

(Queste proprietà possono essere provate usando i vettori e le operazioni su duii essi, compreso il prodotto scalare.)

Equazioni cartesiane di piani.

Sia dato un piano π in $\mathcal{E}^3$ e sia r_0 la retta per O ortogonale a π. Sia n un vettore non nullo applicato in O che sta su r_0 (un "vettore normale" di π) e sia P_0 un punto su π Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^3$ le seguenti condizini sono equivalenti

$$\mathrm{P} \in \pi; \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \perp r_0; \quad (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \perp n; \quad (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n = 0$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in \pi \quad \text{se e solo se} \quad (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n = 0.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^3$ e un vettore non nullo $n \in \mathcal{V}_o^3$, il sottinsieme π di $\mathcal{E}^3$ definito da questa condizione è un piano, che passa per P_0 ed è ortogonale alla retta individuata dal vettore n. Si dice che

$$(\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n = 0$$

è la "equazione cartesiana" del piano per P_0 con vettore normale n.

Identificati i punti P e P_0 ed il vettore n con le terne delle loro coordinate

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad n = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix},$$

per la compatibilità della identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto scalare di vettori, l'equazione cartesiana fra vettori geometrici diviene l'equazione cartesiana fra vettori numerici

$$\begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

una equazione lineare in tre incognite

$$ax + by + cz = d$$

con la terna dei coefficienti delle incognite diversa dalla terna nulla.
Questa terna di coefficienti da un vettore normale al piano.

Esempio Il piano passante per il punto $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ed avente vettore normale $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$(x - 1) + 2(y - 1) + 3z = 0, \quad \text{cioè} \quad x + 2y + 3z = 3$$

Equazioni cartesiane di rette.

Sia data una retta r in $\mathcal{E}^3$ e sia π_0 il piano per O ortogonale ad r. Siano n_1, n_2 due vettori non allineati applicati in O che stanno su π_0 ("vettore normali" di r) e sia P_0 un punto su r. Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^3$ le seguenti affermazioni sono equivalenti

$$\mathrm{P} \in r; \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \perp \pi_0; \quad \begin{cases} \mathrm{P}_0\mathrm{P} \perp n_1 \\ \mathrm{P}_0\mathrm{P} \perp n_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_1 = 0 \\ (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque

$$\mathrm{P} \in r \quad \text{se e solo se} \quad \begin{cases} (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_1 = 0 \\ (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_2 = 0 \end{cases}.$$

Viceversa, dati un punto $\mathrm{P}_0 \in \mathcal{E}^3$ e due vettori non allineati $n_1, n_2 \in \mathcal{V}_o^3$, il sottinsieme r di $\mathcal{E}^3$ definito da questa condizione è una retta, che passa per P_0 ed è ortogonale al piano individuato dai vettori n_1, n_2.
Si dice che

$$\begin{cases} (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_1 = 0 \\ (\mathrm{OP} - \mathrm{OP}_0) \cdot n_2 = 0 \end{cases}$$

è un sistema di equazioni cartesiane della retta. La due equazioni sono le equazioni cartesiane dei piani π_1 e π_2 per P_0 aventi vettori normali ad n_1 ed n_2 ed $r = \pi_1 \frown \pi_2$.

Identificati i punti P e P_0 ed i vettori n_1, n_2 con le terne delle loro coordinate

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad n_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad n_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

per la compatibilità della identificazione rispetto alle operazioni di somma di vettori e di prodotto scalare di vettori, il sistema di equazioni cartsiane diviene

$$\begin{cases} a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + c_1(z - z_0) = 0 \\ a_2(x - x_0) + b_2(y - y_0) + c_2(z - z_0) = 0 \end{cases},$$

un sistema di due equazioni lineari in tre incognite

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

con le terne dei coefficienti delle incognite non proporzionali.

Equazioni parametriche e cartesiane.

L'uso di equazioni cartesiane di piani e di equazioni parametriche di rette permette di trattare in modo diretto la proiezione ortogonale su piani.

Esempio. Determinare la proiezione ortogonale del punto $\mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sul piano π : $3x + 2y + z = 6$.

Il punto P_0' proiezione ortogonale di P_0 su π è il punto di intersezione del piano π e della retta r che passa pe P_0 ed è ortogonale a π,

Il piano π ha un vettore normale $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e questo è un vettore direttore per le rette ortogonali al piano π. La retta r ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} .$$

Dunque le coordinate del punto P_0' sono le soluzioni del sustema in x, y, z

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 6 \\ x = 4 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases} .$$

Sostituendo nella prima equazione si ha

$$3(4 + 3t) + 2(3 + 2t) + 2 + t = 6; \qquad t = -1$$

da cui $\mathrm{P}_0' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.