Lezione del 10.17; principali punti in dettaglio.

Equazioni cartesiane in termini di determinante.

In $\mathcal{E}^2$, fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Sia r la retta che passa per un punto P_0 ed è parallela ad un vettore non nullo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_o^3$ (che ha vettore direttore $\mathbf{v}$). Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^2$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in r \quad & \text{se e solo se} \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \text{ sta su } r \\ & \text{se e solo se} \quad (\mathrm{P} - \mathrm{P}_0) \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono allineati} \\ & \text{se e solo se} \quad \det\left[\mathrm{P} - \mathrm{P}_0,\ \mathbf{v}\right] = 0 \end{aligned}$$

Posto

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

la condizione si riscrive

$$\det \begin{bmatrix} x - x_0 & a \\ y - y_0 & b \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(x - x_0)b - (y - y_0)a = 0.$$

Abbiamo ottenuto una equazione cartesiana della retta r.

Osserviamo che il vettore direttore di r dato è effettivamente ortogonale al il vettore normale ad r che si legge su questa equazione

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -b \\ a \end{bmatrix} = -ab + ba = 0.$$

Esempio. La retta per il punto $\mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ parallela al vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ha equazione cartesiana

$$\det \begin{bmatrix} x - 1 & 1 \\ y + 1 & 2 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{cioè} \quad (x-1)2 - (y+1)1 = 0 \quad \text{cioè} \quad 2x - y = 3$$

In $\mathcal{E}^3$, fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Sia π il piano che passa per un punto P_0 ed è parallelo a due vettori non allineati $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}_o^3$ (che ha vettori giacitura $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$). Per ogni punto $\mathrm{P} \in \mathcal{E}^3$ si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{P} \in \pi \quad & \text{se e solo se} \quad \mathrm{P}_0\mathrm{P} \text{ sta su } \pi \\ & \text{se e solo se} \quad (\mathrm{P} - \mathrm{P}_0),\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ sono complanari} \\ & \text{se e solo se} \quad \det\left[\mathrm{P} - \mathrm{P}_0,\ \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right] = 0 \end{aligned}$$

Posto

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

la condizione si riscrive

$$\det\begin{bmatrix} x-x_0 & a_1 & a_2 \\ y-y_0 & b_1 & b_2 \\ z-z_0 & c_1 & c_2 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(x-x_0)(b_1c_2-c_1b_2)-(y-y_0)(a_1c_2-c_1a_2)+(z-z_0)(a_1b_2-b_1a_2)=0.$$

Abbiamo ottenuto un'equazione cartesiana di π.

Si può verificare che ciascuno dei vettori direttori di r dati è effettivamente ortogonale vettore normale ad r che si legge su questa equazione.

Esempio. Il piano per il punto P_0 avente vettori giacitura $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ dati da

$$\mathrm{P}_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ha equazione cartesiana

$$\det\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 2 & 3 \\ z-1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(x-1)(-5)-y(-1)+(z-1)(-7)=0,$$

cioè

$$-5x+y-7z=-12.$$

Questa è un'equazione cartesiana di r. Una verifica di questo risultato si ha osservando che questa equazione è soddisfatta da P_0 e che ciascuno dei due vettori direttori di π è effettivamente ortogonale al vettore normale a π che si legge dall'equazione; ad esempio:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \end{bmatrix} = 5+2-7=0.$$

Posizioni reciproche di piani e rette.

Ciascuna retta in $\mathcal{E}^3$ è rappresentata da equazioni in 3 incognite: equazioni parametriche (3 equazioni, 1 parametro) ed equazioni cartesiane (2 equazioni). Ciascun piano in $\mathcal{E}^3$ è rappresentato da equazioni parametriche (3 equazioni, 2 parametri) ed equazioni cartesiane (1 equazione). Di seguito consideriamo i problema di riconoscere le posizioni reciproche di piani dati da equazioni cartesiane e di rette date da equazioni parametriche.

Posizione riciproche Piano-Piano. Due piani in $\mathcal{E}^3$ sono in una ed una sola delle seguenti posizioni: paralleli in senso lato (in particolare, coincidenti o paralleli in senso stretto), oppure incidenti in una retta.

Consideriamo due piani dati da equazioni

$$\pi_1: \ a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \quad \pi_2: \ a_2x+b_2y+c_2z=d_2$$

con $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2) \neq (0, 0, 0)$. Si ha:

$\pi_1 \parallel \pi_2$ se e solo se (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) sono proporzionali;

in caso affermativo, $\pi_1 = \pi_2$ se e solo se (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) sono proporzionali;

altrimenti, $\pi_1 \frown \pi_2 = r$ dove

$$r : \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \end{cases}$$

Questa è una rappresentazione cartesiana della retta r. Una rappresentazione parametrica di r si può ottenere ponendo un'opportuna incognita uguale ad un parametro e ricavando le altre in funzione di essa.

Esempio Consideriamo i piani

$$\pi_1 : \ x + y + z = 3 \quad \pi_2 : \ 2x + 3y + 5z = 10$$

Le terne $(1, 1, 1)$ e $(2, 3, 5)$ non soono proporzionali, dunque $\pi_1 \frown \pi_2 = r$ dove

$$r : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 3y + 5z = 10 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti delle incognite x, y ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 1 \neq 0.$$

Dunque possiamo porre $z = t$, riscrivere il sistema come

$$\begin{cases} x + y = 3 - t \\ 2x + 3y = 10 - 5t \end{cases}$$

e ricavare

$$x = \frac{\det \begin{bmatrix} 3 - t & 1 \\ 10 - 5t & 3 \end{bmatrix}}{1} = -1 + 2t,$$

$$y = \frac{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 - t \\ 2 & 10 - 5t \end{bmatrix}}{1} = 4 - 3t$$

Infine

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 4 - 3t \\ z = t \end{cases}$$

Una verifica di questo risultato si ha verificando che il punto di r che si ottiene da questa equazione per $t = 0$ soddisfa il sistema di equazioni cartesiane di r e che il vettore direttore di r dato dei coefficienti di t è effettivamente ortogonale ai due vettori normali che si leggono dal sistema di equazioni cartesiane di r.

Posizioni riciproche piano-retta. Un piano ed una retta in $\mathcal{E}^3$ sono in una ed una sola delle seguenti posizioni: retta parallela in senso lato al piano (in particolare contenuta nel piano o parallela in senso stretto), retta incidente al piano in un punto.

Consideriamo un piano ed una retta dati da equazioni

$$\pi : \; ax + by + cz = d \quad r : \begin{cases} x = x_0 + a't \\ y = y_0 + b't \\ z = z_0 + c't \end{cases}$$

con $(a, b, c), (a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ Si ha:

$r \parallel \pi$ se e solo se $(a, b, c) \cdot (a', b', c') = aa' + bb' + cc' = 0$;

in caso affermativo, $r \subset \pi$ se e solo se $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$;

altrimenti, $r \frown \pi = P$, soluzione del sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ x = x_0 + a't \\ y = y_0 + b't \\ z = z_0 + c't \end{cases}$$

Esempio Consideriamo i seguenti piano e retta

$$\pi : \; x - 2y + 4z = 4 \quad r : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Si ha $(1, -2, 4) \cdot (3, 2, 3) = 11 \neq 0$ dunque $r \not\parallel \pi$ e $r \frown \pi = P$, soluzione del sistema nelle incognite x, y, z

$$\begin{cases} x - 2y + 4z = 4 \\ x = 1 + 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

...

Posizione riciproche retta-retta. Due rette in $\mathcal{E}^3$ sono in una ed una sola delle seguenti posizini reciproche: rette complanari (in particolare parallele in senso lato (in particolare coincidenti o parallele in senso stretto) o incidenti in un punto) oppure sghembe.

Se due rette sono sghembe, allora per ciascuna retta esiste uno ed un solo piano che la contiene ed è parallelo all'altra; i due piani sono paralleli fra loro in senso stretto.

Consideriamo due rette

r_1 passante per un punto P_1 ed avente un vettore direttore $\mathbf{v}_1$;

r_2 passante per un punto P_2 ed avente un vettore direttore $\mathbf{v}_2$.

Si ha:

(1) $r_1 \parallel r_2$ se e solo se $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono proporzionali;

(2) r_1 ed r_2 sono complanari se e solo se

$$\det[\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0;$$

in caso negativo:

esiste uno ed un solo piano π_1 che contiene r_1 ed è parallelo ad r_2, il piano che passa per P_1 ed ha vettori giacitura $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$; ha equazione cartesiana

$$\det[\mathrm{P} - \mathrm{P}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0;$$

esiste uno ed un solo piano π_2 che contiene r_2 ed è parallelo ad r_1, il piano che passa per P_2 ed ha vettori giacitura $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1$; ha equazione cartesiana

$$\det[\mathrm{P} - \mathrm{P}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = 0.$$

π_1 e π_2 sono paralleli in senso stretto.

Esempio Siano

r_1 la retta per $\mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ avente un vettore direttore $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$;

r_2 la retta per il punto $P_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ avente un vettore direttore $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

Si ha

$$\det[\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \det \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix} = -2(1) - 2(-1) - 2(1) = -2 \neq 0$$

Dunque le rette sono sghembe.

Il piano che contiene r_1 ed è parallelo ad r_2 ha equazione cartesiana

$$\det[\mathrm{P} - \mathrm{P}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2] = \det \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y+1 & 2 & 3 \\ z-1 & -3 & -4 \end{bmatrix} = 0$$

cioè

$$(x-1)(1) - (y-1)(-1) + (z-1)(1) = 0$$

cioè

$$x + y + z = 3.$$

Si lascia al lettore di effettuare una verifica.