Lezione del 23.10 - tracce di risoluzione di qualche esercizio

1. Sono dati i piani

$$\pi : \ 4x - 6y + z = 1 \quad \pi_1 : \ 6x - 8y + z = 1 \quad \pi_2 : \ 6x - 9y + z = 1$$

Per ciascuno dei due piani π_1 e π_2, si verifichi che non è parallelo a π e si determini una rappresentazione parametrica della retta intersezione col piano π. Si verifichi uno dei due risultati ottenuti.

1.1 Verifica che ciascuno dei due piani π_1 e π_2 non è parallelo a π : π_1, π_2 e π hanno vettori normali rispettivamente $(6, -8, 1)$, $(6, -9, 1)$ e $(4, -6, 1)$ e ciascuno dei primi due vettori non è multiplo reale del terzo.

1.2 Rappresentazione parametrica della retta $r_1 = \pi \frown \pi_1$. Una rappresentazione cartesiana di r_1 è il sistema

$$\begin{cases} 4x - 6y + z = 1 \\ 6x - 8y + z = 1 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti delle incognite x, y ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -8 \end{bmatrix} = -32 + 36 = 4 \neq 0,$$

dunque per ogni valore $t \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 4x - 6y + z = 1 \\ 6x - 8y + z = 1 \\ \qquad\qquad\ z = t \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} 4x - 6y & = 1 - t \\ 6x - 8y & = 1 - t \\ \qquad z & = t \end{cases}$$

ha una ed una sola soluzione, data da

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 1-t & -6 \\ 1-t & -8 \end{bmatrix}}{4} = \frac{-1+t}{2}$$

$$y = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 1-t \\ 6 & 1-t \end{bmatrix}}{4} = \frac{-1+t}{2}$$

$$z = t$$

Questa è un'equazione parametrica di r_1.

(In questo caso le matrici dei coefficienti di due incognite qualsiasi prese fra x, y, z hanno tutte determinante diverso da 0, dunque si sarebbe potuto ricavare un'equazione parametrica ponendo uguale ad una parametro una qualsiasi delle incognite x, y, z.)

Verifica. Il punto che si legge sull'equazione parametrica deve soddisfare il sistema di equazioni cartesiane:

$$\left\{\begin{array}{l} 4(-\frac{1}{2}) - 6(-\frac{1}{2}) + 0 = 1 \\ \\ 6(-\frac{1}{2}) - 8(-\frac{1}{2}) + 0 = 1 \end{array}\right. , \quad \text{vero}$$

Il vettore direttore che si legge sull'equazione parametrica deve essere ortogonale a ciscuno dei vettori normali che si leggono sul sistema di equazioni cartesiane

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 4 \ + \ \frac{1}{2} \cdot (-6) \ + \ 1 \cdot 1 = 0, \quad \text{vero}$$

$$\begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot 6 \ + \ \frac{1}{2} \cdot (-8) \ + \ 1 \cdot 1 = 0. \quad \text{vero}$$

1.3 Rappresentazione parametrica della retta $r_2 = \pi \frown \pi_1$. Una rappresentazione cartesiana di r_2 è il sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4x - 6y + z = 1 \\ 6x - 9y + z = 1 \end{array}\right.$$

La matrice dei coefficienti delle incognite x, y ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} = -36 + 36 = 0.$$

La matrice dei coefficienti delle incognite x, z ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0,$$

dunque per ogni $t \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\left\{\begin{array}{r} 4x - 6y + z = 1 \\ y = t \\ 6x - 9y + z = 1 \end{array}\right.$$

cioè

$$\left\{\begin{array}{ll} 4x + z & = 1 + 6t \\ \quad y & = t \\ 6x + z & = 1 + 9t \end{array}\right.$$

ha una ed una sola soluzione, data da

$$x = \frac{\begin{bmatrix} 1+6t & 1 \\ 1+9t & 1 \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-3t}{-2} = \frac{3t}{2}$$

$$y = t$$

$$z = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 1+6t \\ 6 & 1+9t \end{bmatrix}}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$$

Questa è un'equazione parametrica di r_2. Su questa equazione si legge che r_2 è contenuta nel piano $z = 1$.

(Il fatto che

$$\det \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 6 & -9 \end{bmatrix} = -36 + 36 = 0$$

equivale al fatto che per ciascun $t \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 4x - 6y + z = 1 \\ 6x - 9y + z = 1 \\ \qquad\qquad\;\; z = t \end{cases}$$

ha nessuna o infinite soluzioni; ciò significa che per ciscun $t \in \mathbb{R}$ il piano $z = t$ o non interseca r_2 in alcun punto oppure contiene r_2; in effetti si è visto che r_2 è contenuta nel piano $z = 1$.)

Verifica. Lasciata al lettore.

2. Sono dati i punti

$$\mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{P}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si scriva un'equazione parametrica della retta per P_1 e P_2 ed un'equazione cartesiana del piano per $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$, si verifichi che la retta non è parallela al piano e si determini il punto intersezione col piano. Si verifichi il risultato ottenuto.

(2.1) La retta per P_1 e P_2 può essere vista come la retta per P_1 con vettore direttore $\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1$. Ha equazione parametrica

$$\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 + t\,(\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1)$$

cioè

$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Il piano per $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$ può essere visto come il piano per Q_1 con vettori giacitura $\mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1$ e $\mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1$. Ha equazione cartesiana

$$\det\left[\mathrm{P} - \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2 - \mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_3 - \mathrm{Q}_1\right] = 0,$$

cioè

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y-0 & 1 & 1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (x-1)(-1) - y(1) + (z-1)(-1) = 0$$

cioè

$$x + y + z - 2 = 0.$$

(2.2) Verifica che la retta non è parallela al piano. Il vettore direttore della retta non deve essere ortogonale al vettore normale del piano, cioè il prodotto scalare dei due vettori deve essere $\neq 0$.

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -2+1+2 \neq 0 \quad \text{vero}$$

Punto intersezione della retta col piano. Ha coordinate la soluzione del sistema nelle incognite x, y, z costituito dal sistema di equazioni parametriche della retta e dall'equazione carrtesiana del piano.

$$\begin{cases} x = 2-2t \\ y = t \\ z = 1+2t \\ x+y+z-2=0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione cartesiana alle incognite le loro espressioni date dal sistema prametrico si ottiene l'equazione in t

$$(2-2t)+t+(1+2t)-2=0, \quad t+1=0, \quad t=-1;$$

sostituendo questo valore di t nel sistema di equazioni parametriche si ottiene

$$\begin{cases} x = 2+2=4 \\ y = -1 \\ z = 1-2=-1 \end{cases}$$

Queste sono le coordinate del punto. Si lascia al lettore verificare che questo punto è allineato con P_1 e P_2 e complanare con $\mathrm{Q}_1, \mathrm{Q}_2, \mathrm{Q}_3$.

3. Sono date le rette

$$r\text{:} \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1-2t \\ z = 1+4t \end{cases} \quad r_1 : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 2+2t \\ z = 2-4t \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2-3t \\ z = 2+9t \end{cases}$$

Per ciascuna delle due rette r_1 ed r_2, si dica se è complanare con r. Se la retta ed r sono complanari, si scriva un'equazione cartesiana di un piano che le contiene, se la retta ed r sono sghembe, si scrivano equazioni cartesiane dei due piani paralleli che le contengono. Si verifichi uno dei risultati ottenuti.

(3.1) Retta r_1. Le retta r passa per il punto P_0 ed ha vettore direttore $\mathbf{v}$ e la retta r_1 passa per il punto P_1 ed ha vettore direttore $\mathbf{v}_1$ dati da

$$\mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

I vettori direttori di r ed r_1 sono uno multiplo reale dell'altro, dunque r ed r_1 sono parallele in senso lato.

Ci si chiede se $r_1 = r$. Ciò capita se e solo se $\mathrm{P}_1 \in r$ cioè $(2, 2, 2)$ soddisfa l'equazione parametrica di r, cioè il seguente sistema in t ha soluzioni

$$\begin{cases} 2 = 1 + t \\ 2 = 1 - 2t \\ 2 = 1 + 4t \end{cases}$$

Questo sistema non ha soluzioni. Dunque $r_1 \neq r$.

Esiste uno ed un solo piano π che contiene sia r che r_1. Questo piano può essere visto come il piano che passa per il punto P_0 ed ha vettori giacitura

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque π ha equazione cartesiana

$$\det [\mathrm{P} - \mathrm{P}_0, \mathbf{v}, \mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_0] = 0$$

cioè

$$\det \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & -2 & 1 \\ z-1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = (x-1)(-6) - (y-1)(-3) + (z-1)(3) = 0$$

cioè

$$-6x + 3y + 3z = 0.$$

Si lascia la verifica al lettore.

(3.2) Retta r_2. Si lascia al lettore.