Lezione del 24.10; principali punti in dettaglio.

Distanze nel piano.

Contesto:

il piano euclideo $\mathcal{E}^2$,

lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori applicati in un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^2$, col prodotto scalare

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{uv}};$$

una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_0^2$;

lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, col prodotto scalare

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2;$$

l'identificazione dell'insieme $\mathcal{E}^2$ con l'insieme $\mathcal{V}_o^2$ che identifica ciascun punto P col vettore posizione OP; l'identificazione dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ con lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ che identifica ciascun vettore con la coppia delle sue coordinate rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$; l'identificazione indotta fra l'insieme $\mathcal{E}^2$ e l'insieme $\mathbb{R}^2$ che identifica ciasun punto con la coppia delle sue coordinate rispetto a $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Per l'identificazione di $\mathcal{E}^2$ con $\mathcal{V}_o^2$, il vettore applicato in O equivalente ad un vettore PQ, che si può scrivere come OQ − OP, si può anche scrivere nella forma breve Q − P.

L'identificazione di $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$ è compatibile anche col prodotto scalare di vettori: se

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

allora

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = a_1 a_2 + b_1 b_2$$

(L'uguale fra un vettore ed una coppia ordinata non è un uguale in senso stretto, indica l'identificazione di un vettore con le sue coordinate rispetto ad una base. L'uguale fra i prodotti scalari è il vero uguale fra numeri; questa uguaglianza vale perchè la base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ è ortonormale.)

Per ogni vettore $\mathbf{v}$, dalla definizione di prodotto scalare si ha che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{vv}} = \|\mathbf{v}\|^2$, così la lunghezza di $\mathbf{v}$ si può scrivere come

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$$

In coordinate,

$$\text{per } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

La lunghezza di vettori gode delle seguenti proprietà

$$\|r\mathbf{v}\| = |r|\|\mathbf{v}\|,$$
$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\| \leq \|\mathbf{v}_1\| + \|\mathbf{v}_2\|$$
$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2, \quad \text{per} \quad \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ vettori ed r scalare. La seconda disuguaglianza si dice "disuguaglianza triangolare", la terza uguaglianza è la forma vettoriale del teorema di Pitagora.

La distanza fra due punti e la lunghezza di un vettore sono legate dalla relazione

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \|\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\| = \|\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1\|,$$

In coordinate,

$$\text{per } \mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \mathrm{P}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}$$

Il Teorema di Pitagora in termini di distanze si esprime nella forma più usuale

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{Q})^2 = \mathrm{d}(\mathrm{P}, \mathrm{R})^2 + \mathrm{d}(\mathrm{R}, \mathrm{Q})^2, \quad \text{per} \quad \mathrm{RP} \perp \mathrm{RQ}$$

Osservazione. Sia r la retta per un punto P_0 avente vettore direttore $\mathbf{v}$ e sia $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_0 + t\,\mathbf{v}$ il punto di r che corrisponde al parametro t. Allora

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_t) = \|P_0 + t\mathbf{v} - \mathrm{P}_0\| = \|t\mathbf{v}\| = |t|\|\mathbf{v}\|,$$

cioè la distanza fra P_0 e P_t è proporzionale al valore assoluto di t, e la costante di proporzionalità è la lunghezza del vettore direttore. In coordinate

$$\text{per } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_t) = |t|\sqrt{a^2 + b^2}$$

Definizione Si dice distanza fra due sottinsiemi del piano il numero reale estremo inferiore delle distanze fra un punto di un insieme ed un punto dell'atro. In simboli:

$$\mathrm{d}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \inf\ \mathrm{d}(A, B)$$

dove A e B variano rispettivamente in $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Di seguito consideriamo la distanza fra punti e rette e fra rette parallele.

Proposizione. La distanza di un punto P_0 da una retta r è data da

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}'_0)$$

dove P'_0 è l'unico punto di r tale che $\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0 \perp r$, cioè P'_0 è la proiezione ortogonale di P_0 su r.

Commento. Per ogni punto $\mathrm{R} \in r$ si ha $\mathrm{P}_0\mathrm{P}'_0 \perp \mathrm{P}'_0\mathrm{R}$ dunque

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{R})^2 = \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}'_0)^2 + \mathrm{d}(\mathrm{P}'_0, \mathrm{R})^2 \quad \text{da cui} \quad \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{R}) \geq \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}'_0);$$

ne segue

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \inf_{\mathrm{R}\in r}\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{R}) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}'_0).$$

Una formula per la distanza di un punto da una retta è data dalla

Proposizione. Per ogni punto P_0 ed ogni retta r dati da

$$\mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \qquad r: \; ax + by + c = 0$$

si ha

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Osservazioni. (1) L'asserto è chiaramente vero se $\mathrm{P}_0 \in r$ in quanto in tal caso entrambi i membri sono nulli. (2) La retta r ha le infinite equazioni cartesiane $kax+kby+kc = 0$ $(k \neq 0)$ ma applicando la formula a ciascuna di esse si ottiene sempre lo stesso risultato:

$$\frac{|kax_0 + kby_0 + kc|}{\sqrt{(ka)^2 + (kb)^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

(3) L'equazione della retta si può scrivere come

$$\mathrm{P} \cdot \mathbf{n} + c = 0, \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \; \mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

e la formula per la distanza come

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, r) = \frac{|\mathrm{P}_0 \cdot \mathbf{n} + c|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Per la distanza fra due rette si ha la

Proposizione. Due rette r ed s sono parallele se e solo se tutti i punti di r hanno la stessa distanza da s; si ha $\mathrm{d}(r, s) = \mathrm{d}(R, s)$, dove R è un qualsiasi punto di r.

Distanze nello spazio.

Contesto:

lo spazio euclideo $\mathcal{E}^3$,

lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$ dei vettori applicati in un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^3$, col prodotto scalare

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos \widehat{\mathbf{uv}};$$

una base ortonormale $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_0^3$;

lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, col prodotto scalare

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2;$$

l'identificazione di $\mathcal{E}^3$ con $\mathcal{V}_o^3$ che identifica ciascun punto P col vettore posizione OP; l'identificazione di $\mathcal{V}_o^3$ ed $\mathbb{R}^3$ che identifica ciascun vettore con la terna delle sue coordinate rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; l'identificazione indotta fra $\mathcal{E}^3$ e $\mathbb{R}^3$ che identifica ciasun punto con la terna delle sue coordinate rispetto a $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

L'identificazione di $\mathcal{V}_o^3$ con $\mathbb{R}^3$ è compatibile con tutte le operazioni introdotte sui vettori, in particolare con il prodotto scalare.

Dalla definizione di prodotto scalare si ricava che

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

In coordinate,

$$\text{per } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

La lunghezza di vettori nello spazio gode delle stesse proprietà dei vettori nel piano.

La distanza fra due punti e la lunghezza di un vettore sono legate dalla relazione

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \|\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1\|.$$

In coordinate,

$$\text{per } \mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}, \mathrm{P}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2) = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2 + (c_2 - c_1)^2}$$

Il Teorema di Pitagora in termini di distanze si esprime nella stessa forma del piano.

Osservazione. Sia r la retta per un punto P_0 avente vettore direttore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ e sia $\mathrm{P}_t = \mathrm{P}_0 + t\ \mathbf{v}$ il punto di r che corrisponde al parametro t. Allora

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_t) = |t|\|\mathbf{v}\| = |t|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Definizione La distanza fra due sottinsiemi dello spazio si definsce come nel piano.

Di seguito consideriamo la distanza fra punti e piani, fra rette e piani e fra rette sghembe.

Proposizione. La distanza di un punto P_0 da un piano π è data da

$$\mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \pi) = \mathrm{d}(\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_0')$$

dove P_0' è l'unico punto di π tale che $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_0' \perp \pi$, cioè P_0' è la proiezione ortogonale di P_0 su π.

Una formula per la distanza di un punto da un piano è data dalla

Proposizione. Per ogni punto P_0 ed ogni piano π dati da

$$\mathrm{P}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \qquad r: \ ax + by + cz + d = 0$$

si ha

$$d(P_0, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Osservazione. L'equazione della retta si può scrivere come

$$P \cdot \mathbf{n} + d = 0, \quad P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \ \mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

e la formula per la distanza come

$$d(P_0, \pi) = \frac{|P_0 \cdot \mathbf{n} + d|}{\|\mathbf{n}\|}.$$

Per la distanza fra una retta e un piano si ha la

Proposizione. Una retta r è parallela ad un piano π se e solo se tutti i punti di r hanno la stessa distanza da π; si ha $d(r, \pi) = d(R, \pi)$, dove R è un qualsiasi punto di r.

Per la distanza fra due rette sghembe si hanno le seguenti proposizioni

Proposizione. Su due rette sghembe r ed s esistono e sono unici un punto $R \in r$ ed un punto $S \in s$ la cui retta congiungente è ortogonale ad r ed s.

Commento. I punti R ed S possono essere costruiti come segue.

Sia ℓ la retta che passa per O ed è ortogonale sia ad r che a s,
siano γ_r e γ_s i piani che sono paralleli ad ℓ e contengono r ed s e
siano $S = \gamma_r \frown s$ e $R = \gamma_s \frown r$.

($\ell \parallel \gamma_r$ e $\ell \parallel \gamma_s$ implicano $\ell \parallel (\gamma_r \frown \gamma_s)$; $(\gamma_r \frown \gamma_s) \supset RS$; dunque $\ell \parallel RS$.)

Indicati con P_r, P_s dei punti di r, s e con $\mathbf{v}_r, \mathbf{v}_s, \mathbf{v}_\ell$ dei vettori direttori di r, s, ℓ, si ha:
il piano γ_r è il piano per P_r con vettori giacitura $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_\ell$ e
il piano γ_s è il piano per P_s con vettori giacitura $\mathbf{v}_s$ e $\mathbf{v}_\ell$.

Proposizione. Date due rette sghembe r, s, siano $R \in r$ ed $S \in s$ i punti tali che $RS \perp r, s$ e sia $\pi_s \supset s$ il piano tale che $r \parallel \pi_s$. Allora

$$d(R, S) = d(r, s) = d(r, \pi_s)$$

Commento. L'enunciato segue dalle disuguaglianze

$$d(R, S) \geq d(r, s) \geq d(r, \pi) = d(R, S).$$

Esercizio. Sono date le due rette sghembe: r_1 per il punto P_1 con vettore direttore $\mathbf{v}_1$ e r_2 per il punto P_2 con vettore direttore $\mathbf{v}_2$, dove

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ P_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Determinare la distanza fra r_1 ed r_2 in due modi: (1) determinando un segmento con estremi su di esse e ad esse ortogonale, e (2) determinando un piano che contiene una di esse ed è parallelo all'altra.

(1) Cerchiamo due punti R_1 e R_2 rispettivamente su r_1 ed r_2 tali che il vettore $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$ sia ortogonale ad r_1 ed r_2.

La condizione che i punti R_1 e R_2 stiano sulle rette r_1 ed r_2 si esprime

$$\mathrm{R}_1 = \mathrm{P}_1 + t_1\mathbf{v}_1, \quad \mathrm{R}_2 = \mathrm{P}_2 + t_2\mathbf{v}_2,$$

per qualche $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$.

Il vettore $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$ è equivalente al vettore

$$\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1 = \mathrm{P}_2 + t_2\mathbf{v}_2 - (\mathrm{P}_1 + t_1\mathbf{v}_1) = \mathbf{w} + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1,$$

dove

$$\mathbf{w} = \mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

La condizione che il vettore $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2$ sia ortogonale ad r_1 ed r_2 si esprime

$$\begin{cases} (\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1) \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ (\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases}$$

Si ha dunque il sistema di due equazioni nelle due incognite t_1, t_2

$$\begin{cases} (\mathbf{w} + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ (\mathbf{w} + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases}$$

Applicando le proprietà del prodotto scalare,

$$\begin{cases} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_1 + t_2\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 - t_1\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mathbf{w} \cdot \mathbf{v}_2 + t_2\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 - t_1\ \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \end{cases}$$

Essendo

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calcolando i prodotti scalari,

$$\begin{cases} 3 + 43t_2 - 21t_1 = 0 \\ 7 + 91t_2 - 43t_1 = 0 \end{cases}$$

Risistemando

$$\begin{cases} -21t_1 + 43t_2 = -3 \\ -43t_1 + 91t_2 = -7 \end{cases}$$

Il determinante della matrice dei coefficienti è

$$\det \begin{bmatrix} -21 & 43 \\ -43 & 91 \end{bmatrix} = -1911 + 1849 = -62$$

Il sistema ha una ed una sola soluzione, data da

$$
t_1 = \frac{\det \begin{bmatrix} -3 & -7 \\ 43 & 91 \end{bmatrix}}{-62} = \frac{-273+301}{-62} = \frac{28}{-62} = -\frac{14}{31}
$$
$$
t_2 = \frac{\det \begin{bmatrix} -21 & -43 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}}{62} = \frac{147-129}{-62} = \frac{18}{-62} = -\frac{9}{31}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1 &= \mathbf{w} + t_2\mathbf{v}_2 - t_1\mathbf{v}_1 \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{31}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix} + \frac{14}{31}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 36 \\ 30 \\ 6 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Infine

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) &= \|\mathrm{R}_2 - \mathrm{R}_1\| \\
&= \left\| \frac{1}{31}\begin{bmatrix} 36 \\ 30 \\ 6 \end{bmatrix} \right\| = \frac{1}{31}\sqrt{36^2+30^2+6^2} = \frac{1}{31}\sqrt{2232}
\end{aligned}
$$

(2) Cerchiamo il piano π_2 passante per r_2 parallelo ad r_1. E' il piano che passa per P_2 ed ha vettori giacitura $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_1$, dunque ha equazione cartesiana

$$
\det\left[\mathrm{P} - \mathrm{P}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1\right] = 0
$$

cioè

$$
\det \begin{bmatrix} x-2 & 1 & 1 \\ y-2 & -3 & -2 \\ z-2 & 9 & 4 \end{bmatrix} = 0
$$

cioè

$$
(x-2)(6) - (y-2)(-5) + (z-2)(1) = 0
$$

cioè

$$
6x + 5y + z - 24 = 0
$$

Si ha

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}(r_1, r_2) = \mathrm{d}(r_1, \pi_2) &= \mathrm{d}(\mathrm{P}_1, \pi_2) \\
&= \frac{|-6-5-1+12|}{\sqrt{36+25+1}} = \frac{12}{\sqrt{62}} = \frac{6\sqrt{62}}{31}
\end{aligned}
$$

I due risultati coincidono.