Lezione del 30.10; principali punti in dettaglio.

Applicazioni lineari. Introduzione.
Una funzione da un insieme "dominio" ad un insieme "codominio" è una legge che ad ogni elemento del dominio associa uno ed un solo elemento "immagine" nel codominio. Per indicare che f è una funzione di dominio A e codominio B, si scrive

$f : A \to B;$

per indicare che l'immagine di un elemento $a \in A$ è un elemento $a' \in B$, si scrive

$f : a \mapsto a', \quad \text{oppure} \quad f(a) = a'.$

Talvolta è utile non usare alcun simbolo per la funzione; in tal caso, per indicare la funzione che ad ogni elemento $a \in A$ associa un elemento immagine $a' \in B$ si scrive

$A \to B, \quad a \mapsto a'.$

Spesso al posto del termine "funzione" useremo il termine "applicazione".

Esempio 0. Siano dati due punti $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2$ in $\mathcal{E}^2$. Ad ogni vettore $\mathbf{v}$ applicato in O_1 associamo l'unico vettore $\mathbf{v}'$ applicato in O_2 che è equivalente a $\mathbf{v}$. Abbiamo così un'applicazione

$$V^2_{o_1} \to \mathcal{V}^2_{o_2}, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'.$$

Questa applicazione è biiettiva, cioè per ogni vettore $\mathbf{w}$ applicato in O_2 esiste uno ed un solo vettore $\mathbf{v}$ applicato in O_1 tale che $\mathbf{v}' = \mathbf{w}$. Ed è compatibile con le operazioni nei due spazi vettoriali, nel senso che:

(1) per ogni due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ in $\mathcal{V}^2_{o_1}$ e loro vettori equivalenti $\mathbf{v}'_1$ e $\mathbf{v}'_2$ in $\mathcal{V}^2_{o_2}$, il vettore $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ in $\mathcal{V}^2_{o_1}$ ha vettore equivalente $\mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$ in $\mathcal{V}^2_{o_2}$;

(2) per vettore $\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}^2_{o_1}$ e suo vettore equivalente $\mathbf{v}'$ in $\mathcal{V}^2_{o_2}$, ed ogni numero r in $\mathbb{R}$, il vettore $r\mathbf{v}$ in $\mathcal{V}^2_{o_1}$ ha vettore equivalente $r\mathbf{v}'$ in $\mathcal{V}^2_{o_2}$;

Si lascia al lettore di dare una rappresentazione grafica di queste affermazioni.

In simboli:

$$\begin{array}{ll} (1) & (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)' = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 \\ (2) & (r\mathbf{v})' = r\mathbf{v}' \end{array}$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}$ in $\mathcal{V}^2_{o_1}$ ed ogni r in $\mathbb{R}$.

Indicata con T l'applicazione, queste proprietà si scrivono

$$\begin{array}{ll} (1) & T(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = T(\mathbf{v}_1) + T(\mathbf{v}_2) \\ (2) & T(r\mathbf{v}) = rT(\mathbf{v}) \end{array}$$

per ogni ...

Definizione. Un'applicazione $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ fra due spazi vettoriali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ si dice "lineare" se

$$\begin{array}{ll} (1) & L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) \\ (2) & L(r\mathbf{v}) = rL(\mathbf{v}) \end{array}$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

Applicazioni lineari di $\mathcal{V}_o^2$ in sè.

Fino ad avviso contrario, il contesto è dato dal piano $\mathcal{E}^2$ con un punto fissato O e dallo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$.

Esempio 1. A ciascun vettore $\mathbf{v}$ applicato in O associamo il vettore $\mathrm{R}(\mathbf{v})$ applicato in O ottenuto rotando $\mathbf{v}$ dell'angolo $\pi/4$ in senso antiorario. Abbiamo così l'applicazione "rotazione di $\pi/4$ in senso antiorario"

$$\mathrm{R}: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2.$$

Questa applicazione è lineare. Più in generale, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ l'applicazione "rotazione di θ in senso antiorario"

$$\mathrm{R}_\theta: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$$

è lineare. Si lascia al lettore di dare una rappresentazione grafica di queste affermazioni.

Esempio 2. Ad ogni dato vettore applicato in O associamo l'unico vettore applicato in O ottenuto moltiplicando il vettore dato per lo scalare 3. Abbiamo così l'applicazione "scaling di coefficiente 3"

$$\mathrm{S}_3: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2., \quad \mathrm{S}_3(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}.$$

Per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}$ in $\mathcal{V}_o^2$ ed ogni r in $\mathbb{R}$ si ha

(1) $\mathrm{S}_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)$ e $\mathrm{S}_3(\mathbf{v}_1) + \mathrm{S}_3(\mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ (per la definizione di S_3);
$3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = 3\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2$ (per le proprietà delle operazioni sui vettori);
dunque

$$\mathrm{S}_3(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \mathrm{S}_3(\mathbf{v}_1) + \mathrm{S}_3(\mathbf{v}_2)$$

(2) $\mathrm{S}_3(r\mathbf{v}) = 3(r\mathbf{v})$ e $r\mathrm{S}_3(\mathbf{v}) = r(3\mathbf{v})$ (per la definizione di S_3);
$3(r\mathbf{v}) = r(3\mathbf{v})$ (per le proprietà delle operazioni sui vettori);
dunque

$$\mathrm{S}_3(r\mathbf{v}) = r\mathrm{S}_3(\mathbf{v})$$

Dunque S_3 è lineare.

Più in generale, per ogni scalare r fissato in $\mathbb{R}$ l'applicazione "scaling di fattore r"

$$\mathrm{S}_r: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2., \quad \mathrm{S}_r(\mathbf{v}) = r\mathbf{v}$$

è lineare.

Si osservi che S_{-1} è la simmetria centrale di centro O e che S_0 è l'applicazione che schiaccia tutti i vettori nel vettore nullo 0.

Esempio 3. Sia r una retta passante per O. A ciascun vettore $\mathbf{v}$ applicato in O associamo il vettore applicato in O proiezione ortognonale di $\mathbf{v}$ su r. Abbiamo così l'applicazione "proiezione ortogonale su r"

$$\mathrm{P}_r: \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2.$$

Questa applicazione è lineare. Si lascia al lettore di dare una rappresentazione grafica di questa affermazione.

In generale, come sono fatte le applicazioni lineari $\mathcal{V}_o^2$ in sè?

Sia $L : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ lineare. Fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, si ha che ogni vettore di $\mathcal{V}_o^2$ si scrive in uno ed un solo modo come combinazione lineare $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ di $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Per la linearità di L si ha

$$L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = L(x\mathbf{i}) + L(y\mathbf{j}) = x\ L(\mathbf{i}) + y\ L(\mathbf{j}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

dove abbiamo posto $L(\mathbf{i}) = \mathbf{a}$ e $L(\mathbf{j}) = \mathbf{b}$. Dunque L è un'applicazione del tipo

$$L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$$

dove $\mathbf{a} = L(\mathbf{i})$ e $\mathbf{b} = L(\mathbf{j})$. Viceversa, si prova che comunque siano fissati una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ e due vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathcal{V}_o^2$, questa formula definisce un'applicazione di $\mathcal{V}_o^2$ in sè e questa applicazione è lineare.

Applicazioni lineari di $\mathcal{V}_o^2$ in sè e applicazioni lineari di $\mathbb{R}^2$ in sè.
Identificato $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$ tramite la scelta di una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, ogni applicazione $F : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ viene identificata con con un'applicazione $\overline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\overline{F} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{se e solo se} \qquad F(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}.$$

Per la compatibilità dell'identificazione di $\mathcal{V}_o^2$ ed $\mathbb{R}^2$ con le operazioni di somma di vettori e prodotto di scalari per vettori, si ha che F è lineare se e solo se $\overline{F}$ è lineare.

Esempio 1. Consideriamo la rotazione $\mathrm{R} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ di $\pi/4$ in senso antiorario attorno ad O. Fissiamo due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di lunghezza 1 fra loro ortogonali, in modo che il verso dell'angolo da $\mathbf{i}$ a $\mathbf{j}$ sia antiorario. Allora

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(\mathbf{i}) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{j}, \\ \mathrm{R}(\mathbf{j}) &= -\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{j}, \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{R}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= x\ (\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{j}) + y\ (-\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathbf{j}) \\ &= (\frac{\sqrt{2}}{2}\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}\ y)\ \mathbf{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}\ x + \frac{\sqrt{2}}{2}\ y)\ \mathbf{j} \end{aligned}$$

Dunque R viene identificata con l'applicazione $\overline{\mathrm{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\overline{\mathrm{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases}$$

Si noti che x' e y' sono polinomi omogenei di primo grado in x, y. Inoltre, la matrice dei coefficienti dei polinomi

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ha nella prima colonna le coordinate di $\mathrm{R}(\mathbf{i})$ e nella seconda colonna le coordinate di $\mathrm{R}(\mathbf{j})$ rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Esempio 2. Consideriamo lo scaling $\mathrm{S}_3 : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ di centro O di ragione 3. Fissiamo due vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ non allineati. Allora

$$\mathrm{S}_3(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 3(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = 3x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j}.$$

Dunque S_3 viene identificata con l'applicazione $\overline{\mathrm{S}}_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\overline{\mathrm{S}}_3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 3y \end{cases}$$

x' e y' sono polinomi omogenei di I grado in x, y e la matrice dei coefficienti dei polinomi è

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

In generale, siano
$\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base di $\mathcal{V}_o^2$,
$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ vettori in $\mathcal{V}_o^2$, e sia
$L : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ l'applicazione lineare tale che $L(\mathbf{i}) = \mathbf{a}$ e $L(\mathbf{j}) = \mathbf{b}$.

Allora

$$\begin{aligned} L(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= x(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}) + y(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}) \\ &= (a_1x + b_1y)\mathbf{i} + (a_2x + b_2y)\mathbf{j} \end{aligned}$$

Dunque R viene identificata con l'applicazione $\overline{\mathrm{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\overline{\mathrm{R}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \quad \text{dove} \quad \begin{cases} x' = a_1x + b_1y \\ y' = a_1x + b_1y \end{cases}$$

x' e y' sono polinomi omogenei di primo grado in x, y, e la matrice dei coefficienti

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

ha nella prima colonna le coordinate di $\mathbf{a}$ e nella seconda colonna le coordinate di $\mathbf{b}$ rispetto a $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Applicazioni lineari di $\mathbb{R}$ in sè.

Le applicazioni lineari $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono le appicazioni più semplici, quelle che esprimono una relazione di proporzionalità diretta, precisamente:

Le applicazioni lineari $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono tutte e sole le applicazioni del tipo

$$L(x) = mx, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

con m costante in $\mathbb{R}$; inoltre, $m = L(1)$. Infatti:

Da una parte, ogni applicazione del tipo $L(x) = mx$, $(x \in \mathbb{R})$, con m costante in $\mathbb{R}$, è lineare in quanto

$L(x_1 + x_2) = m(x_1 + x_2) = mx_1 + mx_2 = L(x_1) + L(x_2)$

$L(rx) = m(rx) = r(mx) = rL(x)$

per ogni $x_1, x_2, x, r \in \mathbb{R}$.

Dall'altra, se $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è lineare, allora per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha

$L(x) = L(x1) = xL(1) = mx$

dove $m = L(1)$. ■

L'applicazione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non è lineare. In realtà non soddisfa nessuna delle due proprietà di linearità. Ad esempio si ha

$F(x_1 + x_2) = 1$
$F(x_1) + F(x_2) = 1 + 1 = 2$,

per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.