Lezione del 31.10; principali punti in dettaglio.

Applicazioni lineari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Abbiamo dato la

Definizione. Un'applicazione $L : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ fra due spazi vettoriali $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ si dice "lineare" se

$$\begin{aligned} &L(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = L(\mathbf{v}_1) + L(\mathbf{v}_2) \\ &L(r\mathbf{v}) = rL(\mathbf{v}) \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$.

Abbiamo visto che le applicazioni lineari $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono tutte e sole le applicazioni del tipo

$$L(x) = mx, \qquad (x \in \mathbb{R})$$

con m costante in $\mathbb{R}$; inoltre, $m = L(1)$.

Come sono fatte le applicazioni lineari $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare. Allora si ha

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = L\left(x\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x\, L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\, L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underset{*}{=}$$

e, posto $L\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix}$, $L\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix}$, si ha

$$\underset{*}{=} x\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \\ c_1x + c_2y \end{bmatrix}$$

Dunque L è data da 3 polinomi omogenei di primo grado (eventualmente nulli) in 2 variabili

$$L\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1x + a_2y \\ b_1x + b_2y \\ c_1x + c_2y \end{bmatrix}.$$

Inoltre, la matrice dei coefficienti ha per colonne le immagini in $\mathbb{R}^3$ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \left[\ L(e_1), L(e_2)\ \right].$$

Viceversa, si prova che un'applicazione di questo tipo è lineare. ■

Esempio. Un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x \\ y \\ x + 2y \end{bmatrix};$$

la matrice dei coefficienti è

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Interpretazione geometrica. Fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$ ed una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$, si ha che questa applicazione $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è la rappresentazione in coordinate dell'applicazione $\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^3$ definita da

$$\mathbf{i} \mapsto 2\mathbf{i} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \mapsto \mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Questa applicazione crea una immagine dell'insieme dei vettori del piano (pensato come entità a se stante) come l'insieme dei vettori di un piano nello spazio (il piano idividuato dai vettori $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$ e $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.)

Ogni applicazione lineare $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ è la rappresentazione in coordinate di un'applicazione $\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^3$; questa applicazione crea una immagine dell'insieme dei vettori del piano data da: l'insieme dei vettori di un piano nello spazio, oppure l'insieme dei vettori di una retta nello spazio, oppure l'insieme ridotto al solo vettore nullo dello spazio. ■

Così come fatto nel caso $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, si prova la

Proposizione. Le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni date da m polinomi omogenei di primo grado (eventualmente nulli) in n variabili

$$L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix};$$

inoltre, la matrice dei coefficienti dei polinomi ha per colonne le immagini dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(e_1), & L(e_2), & \ldots, & L(e_n) \end{bmatrix}.$$

Composizione di applicazioni lineari.

Siano date due funzioni

$$f : A \to B, \quad g : B \to C.$$

Allora ad ogni elemento $a \in A$ la funzione f associa un elemento $f(a) \in B$ e a questo elemento la funzione g associa un elemento $g(f(a)) \in C$. Si ha così una funzione che si dice "funzione composta g dopo f" in breve "g dopo f" e si indica con $g \circ f$; in simboli:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)), \quad \forall a \in A.$$

Alcuni fatti generali sull'operazione di composizione di funzioni:

(0) E' un'operazione parziale.

(1) Per ogni insieme A, la funzione da A ad A che ad ogni elemento associa sè stesso si dice “funzione identità” su A e si indica con id_A; in simboli:

$$\mathrm{id}_A : A \to A, \quad \mathrm{id}_A(a) = a \quad \forall a \in A.$$

Le funzioni identità sono gli analoghi del numero 1, nel senso che per ogni $f : A \to B$ si ha

$$f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f.$$

(2) Vale la proprietà associativa: per ogni tre funzioni

$$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D$$

si ha

$$[(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)] \ : \ A \to D$$

dove

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a) = h(g(f(a))) \quad \forall a \in A.$$

Osservazione. Le applicazioni identità su spazi vettoriali sono lineari. Per ciascun intero positivo n, l'identità sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$

$$\mathrm{id}_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{id}_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

è rappresentata dalla “matrice identità di ordine n”

$$\mathrm{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

che ha elementi 1 sulla diagonale discendenre e 0 altrove.

Proposizione. Se due applicazioni $F : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ e $G : \mathcal{W} \to \mathcal{Z}$ fra spazi vettoriali $\mathcal{V}, \mathcal{W}, \mathcal{Z}$ sono lineari, allora anche l'applicazione composta $G \circ F : \mathcal{V} \to \mathcal{Z}$ è lineare.

Infatti:

$$\begin{aligned}(G \circ F)(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) &= G(F(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)) \\ &= G(F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2)) = G(F(\mathbf{v}_1)) + G(F(\mathbf{v}_2)) = (G \circ F)(\mathbf{v}_1) + (G \circ F)(\mathbf{v}_2)\end{aligned}$$

e

$$(G \circ F)(r\mathbf{v}) = G(F(r\mathbf{v})) = G(rF(\mathbf{v})) = rG(F(\mathbf{v})) = r(G \circ F)(\mathbf{v})$$

per ogni $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$ ed ogni $r \in \mathbb{R}$. Si lascia al lettore di giustificare i singoli passaggi.

Matrici. Prodotto di matrici.

Termini e notazioni. Una matrice di numeri reali è una tabella di numeri reali disposti su righe e colonne; invece di dire che ha m righe ed n colonne si dice in breve che ha "tipo" $m \times n$; invece di dire elemento della $i-$ma riga e $j-$ma colonna si dice in breve elemento di "posto" (i, j).

Indicata con A una matrice, si indica
con A_{ij} l'elemento di posto (i, j) di A
con $A_{i\,:}$ la riga $i-$ma di A
con $A_{:\,j}$ la colonna $j-$ma di A

Ad esempio, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ha tipo 4×3 e

$$A_{32} = 6 \quad A_{3\,:} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} \quad A_{:\,2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Prodotto di una riga per una colonna. Date una riga ed una colonna di numeri reali aventi lo stesso numero di componenti, moltiplicando ciascun elemento della riga per il corrispondente elemento della colonna e poi sommando si ottiene un numero reale, che si dice prodotto della riga per la colonna - se la riga e la colonna non hanno lo stesso numero di componenti, il prodotto non è definito. Questa operazione di prodotto si indica scrivendo prima la riga e poi la colonna. Ad esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 = 32$$

In generale

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Il prodotto di una riga per una colonna coincide con il prodotto scalare delle corrispondenti ennuple di numeri reali pensate come colonne, e dunque ha le stesse proprietà:

$$\begin{aligned} (1) \quad & (A + C)B = AB + AC \\ (1') \quad & A(B + D) = AB + AD \\ (2) \quad & A(rB) = (rA)B = r(AB) \end{aligned}$$

per ogni A, C righe $1 \times n$ e B, D colonne $n \times 1$ e $r \in \mathbb{R}$.

Prodotto righe-per-colonne di matrici. Se il numero delle colonne di una matrice A è uguale al numero delle righe di una matrice B, allora possiamo moltiplicare ciascuna riga di A per ciascuna colonna di B ed organizzare questi prodotti in una tabella; otteniamo così una matrice detta matrice prodotto (righe per colonne) di A per B, ed indicata con AB. Ad esempio, si ha

$$\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 1\cdot 1+2\cdot 4 & 1\cdot 2+2\cdot 5 & 1\cdot 3+2\cdot 6 \\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 3+4\cdot 6 \\ 5\cdot 1+6\cdot 4 & 5\cdot 2+6\cdot 5 & 5\cdot 3+6\cdot 6 \\ 7\cdot 1+8\cdot 4 & 7\cdot 2+8\cdot 5 & 7\cdot 3+8\cdot 6 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \\ 39 & 54 & 69 \end{array}\right]$$

In simboli, il prodotto di una matrice A di tipo $m \times n$ per una matrice B di tipo $n \times p$ è la matrice AB di tipo $m \times p$

$$\underset{m\times n}{A}\,\underset{n\times p}{B} = \underset{m\times p}{AB}$$

data dalla tabella dei prodotti delle m righe di A per le p colonne di B : l'elemento di posto (i,j) in AB e' dato dal prodotto della riga $i-$ma di A per la colonna $j-$ma di B :

$$\begin{aligned} (AB)_{ij} &= A_{i\,:}B_{:\,j} \\ &= A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj} \\ &= \sum_{h=1}^{n} A_{ih}B_{hj}. \end{aligned}$$

Matrici identità. Le matrici identità svolgono il ruolo del numero 1, nel senso che

$$A\mathrm{I}_n = A = \mathrm{I}_m A,$$

per ogni m, n e per ogni matrice A di tipo $m \times n$.

Verifichiamo la prima parte di questa proprieta' per $m = 3$ e $n = 2$. Per ogni matrice

$$A = \left[\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \\ e & f \end{array}\right]$$

di tipo 2×3 si ha

$$\begin{aligned}
AI_2 &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a1+b0 & a0+b1 \\ c1+d0 & c0+d1 \\ e1+f0 & e0+f1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = A.
\end{aligned}$$

Associatività. Date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, abbiamo due modi di moltiplicarle per ottenere una matrice, che sarà di tipo $m \times q$:

$$(AB)C, \qquad A(BC).$$

Ad esempio, per $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, si ha

$$\begin{aligned}
(AB)C &= \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix} \\
A(BC) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [5] = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Quello che abbiamo visto su questo esempio vale in generale. La moltiplicazione di matrici possiede la proprietà associativa: comunque siano date tre matrici A, B, C di tipi rispettivamente $m \times n, n \times p, p \times q$, si ha

$$(AB)C = A(BC).$$

Potremo così scrivere un prodotto di più matrici senza usare parentesi.

Applicazioni lineari e matrici; composizione e prodotto.

Proposizione. Le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sono tutte e sole le applicazioni del tipo

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}, \qquad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n),$$

con A matrice costante $m \times n$; inoltre, $A = [L(e_1), L(e_2), \ldots, L(e_n)]$.

Infatti

$$L \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Proposizione. Se

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad F(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \qquad (A\ m \times n) \\ G &: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p, \quad G(\mathbf{x}) = B\mathbf{x} \qquad (B\ p \times n) \end{aligned}$$

allora

$$G \circ F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \quad (G \circ F)(\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x}.$$

Infatti

$$(G \circ F)(\mathbf{x}) = G(F(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x},$$

per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.