Lezione del 6.11; principali punti in dettaglio.

Calcolo di una composizione. Sono date $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix}, \quad G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 3x+y \end{bmatrix}$$

Calcoliamo l'applicazione composta $G \circ F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in due modi.

1- Usando solo la definizione di applicazione composta

$$\begin{aligned}(G \circ F)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= G\left(F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= G\begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x+2y \\ 3(x+2y)+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ 3x+7y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

2- Usando la rappresentazione con matrici

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned}(G \circ F)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= G\left(F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Non commutatività. Abbiamo visto che il prodotto di matrici è un'operazione associativa. Vediamo ora che non è commutativa, cioè che la proprietà $AB = BA$ non è soddisfatta per ogni due matrici A, B (in un certo senso non è quasi mai soddisfatta).

Esempio 1. Può succedere che un prodotto sia definito e l'altro non sia definito:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{non è definito}$$

Esempio 2 Può succedere che entrabe le matrici prodotto siano definite ma siano di tipi diversi (dunque diverse):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 5$$

Affinchè le matrici prodotto AB e BA siano definite ed abbiano lo stesso tipo è necessario e sufficiente che A e B siano quadrate di uno stesso tipo.

Infatti, indicati i tipi di A e B con $m \times n$ e $p \times q$, si ha:
affichè AB sia definita deve essere $n = p$;

affichè BA sia definta deve essere $q = m$;
affinchè AB e BA abbiano lo stesso tipo deve essere $m = p$ e $q = n$;
dunque deve essere $m = n = p = q$.

Viceversa, se A e B sono quadrate di stesso tipo $n \times n$, allora AB e BA sono definite ed hanno lo stesso tipo $n \times n$.

Esempio 3. Anche se le due matrici sono quadrate dello stesso tipo può succedere che i due prodotti siano diversi:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Applicazioni lineari di uno spazio vettoriale in sè e matrici quadrate. D'ora innanzi siamo specialmente interessati ai seguenti oggetti:

applicazioni lineari di uno spazio vettoriale geometrico $\mathcal{V}_o^n$ in sè con l'operazione di composizione, $n = 1, 2, 3$;

applicazioni lineari di uno spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^n$ in sè con l'operazione di composizione, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

matrici quadrate $n \times n$ con il prodotto di matrici, $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$.

Siamo interessati alle applicazioni lineari fra spazi vettoriali geometrici, che sono rappresentate in coordinate da applicazini lineari fra spazi vettoriali numerici, che a loro volta sono rappresentate da matrici.

Matrici diagonali. Le matrici diagonali sono matrici quadrate dellla forma

$$[a], \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad \ldots$$

dove $a, b, c, \ldots$ sono numeri reali qualsiasi (eventualmente nulli). In altri termini, una matrice A $n \times n$ è diagonale se e solo se $A_{ij} = 0$ per ogni $i, j = 1, 2, \ldots, n$ con $i \neq j$.

Il prodotto di due matrici diagonali è particolarmente semplice: è una matrice diagonale con elementi diagonali i prodotti degli elementi diagonali omologhi delle due matrici:

$$\begin{bmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n b_n \end{bmatrix}$$

In particolare, due matrici diagonali (dello stesso tipo) commutano.

Determinante.

La matrice identità I_n può essere scritta come $\mathrm{I}_n = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]$, dove $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono i vettori canonici colonna $n \times 1$. Dunque per il teorema/definizione sul determinante delle matrici $n \times n$ si ha

$$\det \mathrm{I}_n = \det [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n] = 1.$$

Teorema. Il determinante della matrice prodotto di due matrici è uguale al prodotto dei determinanti delle due matrici: per ogni A, B matrici quadrate dello stesso tipo

$$\det(AB) = \det(A)\det(B),$$

Non diamo alcuna idea della dimostrazione di questo teorema. Ne vedremo un certo numero di conseguenze. Lo illustriamo solo su un esempio.

Da una parte si ha

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 9 & 13 \\ 19 & 29 \end{bmatrix} = 261 - 247 = 14.$$

Dall'altra si ha

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = (-2)(-7) = 14.$$

Funzione inversa. Richiami.

Sia $f : A \to B$ una funzione fra due insiemi A e B. Se $a \in A$ e $b \in B$ sono legati dalla relazione $f(a) = b$ allora si dice che
b è "la immagine" di a (termine già introdotto) e
a è "una preimmagine" di b.

Da una parte, per il solo fatto che f è una funzione, si ha che ogni elemento di A ha una ed una sola immagine in B. Dall'altra parte, può succedere che un elemento di B non possegga alcuna preimmagine in A, e può succedere che un elemento di B possegga più di una preimmagine in A.

Si dice che la funzione f è "biiettiva" se ogni elemento di B possiede una ed una sola preimmagine in A.

In questo caso, la legge che associa ad ogni elemento di B la sua preimmagine in A è una funzione; questa funzione si dice "funzione inversa" di f e si indica con f^{-1}. In simboli,

$$f^{-1} : B \to A, \qquad f^{-1}(b) = (\text{preimmagine di } b), \quad \forall b \in B.$$

Nel nostro contesto la situazione sarà la seguente.

La funzione f sarà data esplicitamente da un'espressione $f(x)$ a valori in B in una variabile x su A. Consideremo l'equazione parametrica

$$f(a) = b$$

nella incognita a, dove b è un parametro su B. La funzione f è biiettiva se e solo se questa equazione ha una ed una sola soluzione per ogni valore del parametro b. In tal caso, la soluzione dell'equazione è una funzione del parametro, che è la funzione inversa di f :

$$a = f^{-1}(b).$$

La funzione inversa f^{-1} sarà data esplicitamente da un'espressione $f^{-1}(x)$ a valori in A in una variabile x su B.

In realtà, per il tipo di funzioni che considereremo, si avrà $A = B$.

Applicazioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in sè biiettive e loro inverse; caso $n = 1, 2$

Esempio 1. Sia L l'applicazione lineare di $\mathbb{R}$ in sè data da $L(x) = 2x$. Consideriamo l'equazione $2a = b$ con a incognita e b parametro, entrambi su $\mathbb{R}$. Per ogni b l'equazione ha una ed una sola soluzione, data da $a = \frac{1}{2}\, b$. Dunque l'applicazione L è biiettiva con inversa l'applicazione lineare di $\mathbb{R}$ in sè data da $L^{-1}(x) = \frac{1}{2}\, x$.

Esempio 2. L'applicazione lineare $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L(x) = mx$, è biiettiva se e solo se $m \neq 0$; in tal caso ha inversa l'applicazione lineare $L^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L^{-1}(x) = \frac{1}{m}\, x$.

Esempio 3.Consideriamo l'applicazione lineare

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 3y \\ 4x + 9y \end{bmatrix}$$

Consideriamo l'equazione

$$\begin{bmatrix} 2a_1 + 3a_2 \\ 4a_1 + 9a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

con $\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ incognita e $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ parametro, entrambi su $\mathbb{R}^2$. Questa equazione equivale al sistema lineare

$$\begin{cases} 2a_1 + 3a_2 = b_1 \\ 4a_1 + 9a_2 = b_2 \end{cases}$$

con a_1, a_2 incognite e b_1, b_2 parametri, tutti su $\mathbb{R}$. Si ha

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = 6 \neq 0$$

dunque per ogni b_1 e b_2 il sistema ha una ed una sola soluzione, data in funzione dei parametri da

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\det \begin{bmatrix} b_1 & 3 \\ b_2 & 9 \end{bmatrix}}{6} = \frac{3}{2}\, b_1 - \frac{1}{2}\, b_2 \\ a_2 &= \frac{\det \begin{bmatrix} 2 & b_1 \\ 4 & b_2 \end{bmatrix}}{6} = -\frac{2}{3}\, b_1 + \frac{1}{3}\, b_2 \end{aligned}$$

In altri termini,

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\, b_1 - \frac{1}{2}\, b_2 \\ -\frac{2}{3}\, b_1 + \frac{1}{3}\, b_2 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'applicazione F è biiettiva, con inversa data dall'applicazione lineare

$$F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\, x - \frac{1}{2}\, y \\ -\frac{2}{3}\, x + \frac{1}{3}\, y \end{bmatrix}.$$