Lezione del 7.11; principali punti in dettaglio.

Altre operazioni sulle matrici.

Prodotto di numeri reali per matrici. Il prodotto rA di un numero reale r per una matrice A di tipo $m \times n$ è la matrice di tipo $m \times n$ ottenuta moltiplicando r per ciascun elemento di A. Ad esempio:

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Le operazioni di prodotto di numeri reali per matrici e di prodotto di matrici soddisfano la proprietà

$$A(rB) = (rA)B = r(AB)$$

per ogni numero reale r ed ogni A, B matrici per le quali esiste il prodotto AB.

Trasposta di una matrice. La matrice "trasposta" di una matrice A di tipo $m \times n$ è la matrice A^T di tipo $n \times m$ ottenuta da A trascrivendo le righe come colonne o che è lo stesso trascrivendo le colonne come righe; in altri termini: l'elemento di posto (i, j) in A^T è l'elemento di posto (j, i) di A, per ogni i, j. Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrice inversa e determinante.

Ricordiamo che per ciascun numero reale $m \neq 0$, l'inverso m^{-1} di m è l'unico numero reale tale che

$$mm^{-1} = 1;$$

il numero 0 non ha alcun inverso in quanto non esiste aòlcun numero reale b tale che $0\ b = 1$.

Definizione. Si dice che una matrice A $n \times n$ è "invertibile" se esiste una matrice $n \times n$ che sia moltiplicata a destra di A sia moltiplicata a sinistra di A dà la matrice identità $n \times n$. In tal caso, la seconda matrice è unica, si dice che è "la matrice inversa" di A e la si indica con A^{-1}. In simboli, A^{-1} è caratterizzata dalle condizioni

$$AA^{-1} = \mathrm{I}_n = A^{-1}A.$$

Esempio 1. Si ha

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

in quanto

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Esempio 2.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{non è invertibile.}$$

Infatti, se esistesse una matrice

$$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{bmatrix}$$

che moltiplicata a destra di A desse la matrice I_2 allora si avrebbe in particolare

$$\begin{cases} 2p_1 + 3p_2 = 1 \\ 4p_1 + 6p_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{impossbile.}$$

Complementi algebrici di una matrice. Sia A una matrice quadrata. Intersecando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A si ha l'elemento di posto (i, j) di A che indichiamo con a_{ij}. Cancellando la $i-$ma riga e la $j-$ma colonna di A si ottiene una sottomatrice quadrata; questa sottomatrice ha un certo determinante; questo determinante, preso col suo segno o col segno opposto secondo che $i+j$ sia pari o dispari, si dice "complemento algebrico" di posto (i, j) di A; lo indichiamo con A_{ij}.

Esempio.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}; \quad A_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = -3; \quad A_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -(-1) = 1.$$

Siamo ora nelle condizioni di dare una caratterizzazione delle matrici invertibili e una formula per la matrice inversa

Teorema. Sia A una matrice $n \times n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) A è invertibile;

(2) $\det(A) \neq 0$.

In tal caso, l'inversa di A è data dal prodotto dell'inverso del determinante di A per la trasposta della matrice dei complementi algebrici di A

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}^T;$$

in particolare, per una matrice 2×2 si ha

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T \\ &= \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Commento. Ci si può rendere conto che la (1) implica la (2) come segue.

Se esiste A^{-1}, allora $AA^{-1} = \mathrm{I}_n$, allora $\det(AA^{-1}) = \det(\mathrm{I}_n)$, allora $\det(A)\det(A^{-1}) = 1$, allora $\det(A) \neq 0$.

Esempio 1 rivisto Essendo
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = 6 \neq 0,$$
la matrice è invertibile, e
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$
Esempio 2 rivisto. Essendo
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = 0,$$
la matrice non è invertibile.

Esempio 3. I valori del parametro k tali che la matrice
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{bmatrix}$$
sia invertibile sono quelli tali che
$$\det \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & k \end{bmatrix} = 2k - 12 \neq 0 \qquad k \neq 6.$$
La matrice è invertibile se e solo se $k \neq 6$.

Esempio 4. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$
Si ha
$$\det(A) = 1(-1) - 2(-2) + 4(-1) = -1,$$
dunque la matrice è invertibile, ed ha inversa
$$A^{-1} = - \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Applicazioni lineari e matrici, biiettività e inversione.

Ricordiamo il seguente

Fatto. Sia data un'applicazione lineare L di $\mathbb{R}$ in sè, $L(\mathbf{x}) = mx$ (m numero reale costante). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

1. L è biiettiva;
2. $m \neq 0$;

In tal caso, L^{-1} è l'applicazione di $\mathbb{R}$ in sè data da $L^{-1}(x) = \frac{1}{m}\, x$.

In generale si ha il

Teorema. Sia data un'applicazione lineare L di $\mathbb{R}^n$ in sè, $L(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ (M matrice $n \times n$ costante). Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(1) L è biiettiva;
(2) per ogni $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ l'equazione $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$ nell'incognita $\mathbf{a}$ ha una ed una sola soluzione;
(3) $\det(M) \neq 0$;
(4) M è invertibile.

In tal caso, L^{-1} è l'applicazione di $\mathbb{R}^n$ in sè data da $L^{-1}(\mathbf{x}) = M^{-1}\mathbf{x}$.

Commento
(1) equivale a (2) per definizione;
(2) equivale a (3) per il teorema su sistemi lineari e determinanti;
(3) equivale a (4) per il teorema di sopra.
In tal caso, l'equazione $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$ nell'incognita $\mathbf{a}$ si può risolvere come segue. Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per M^{-1} si otttiene

$M^{-1}M\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$, da cui

$\mathrm{I}_n\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$ (per la definizione di matrice inversa), da cui

$\mathbf{a} = M^{-1}\mathbf{b}$ (per la proprietà delle matrici identità).

Esempio 1'. Consideriamo l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+9y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Per quanto visto nell'esempio 1, la matrice dei coefficienti è invertibile e la sua inversa è

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Dunque F è biiettiva, e la sua inversa è l'applicazione lineare $F^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$F^{-1}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\,x - \frac{1}{2}\,y \\ -\frac{2}{3}\,x + \frac{1}{3}\,y \end{bmatrix}.$$

Si ritrova così quello che si era trovato direttamente nella lezione scorsa.

Esempio 2'. Consideriamo l'applicazione lineare $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$G\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 4x+6y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Per quanto visto all'esempio 2, la matrice dei coefficienti non è invertibile. Dunque l'applicazione G non è biiettiva.

Vale la pena di vedere questo fatto anche direttamente. G è l'unica applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè che manda i vettori canonici $\mathbf{e}_1$ ed $\mathbf{e}_2$ nei vettori

$$\mathbf{e}_1' = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2' = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Si ha $\mathbf{e}_2' = \frac{3}{2}\mathbf{e}_1'$, e i vettori $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'$ sono allineati. L'applicazione lineare G schiaccia il piano $\mathbb{R}^2$ sulla retta individuata da $\mathbf{e}_1'$, dunque non è biiettiva.

Esempio 4'. Consideriamo l'applicazione lineare $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$H \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x+2y+z \\ 4x+3y+z \end{bmatrix}$$

Per quanto visto all'esempio 4, la matrice dei coefficienti è invertibile, ed ha inversa

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque l'applicazione H è biiettiva ed ha applicazione inversa $H^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$H^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-2y+z \\ -2x+3y-z \\ 2x-y \end{bmatrix}.$$

Significato geometrico del determinante.

Nel piano $\mathcal{E}^2$. Consideriamo una coppia ordinata (a, b) di semirette uscenti da uno stesso punto, non allineate.
Diciamo che la coppia (a, b) è "destrorsa" se è possibile appoggiare il dorso della mano destra sul piano in modo che il pollice e l'indice siano rispettivamente sulla semiretta a e sulla semiretta b;
diciamo che la coppia (a, b) è "sinistrorsa" se è possibile appoggiare il dorso della mano sinistra sul piano in modo che il pollice e l'indice siano rispettivamente sulla semiretta a e sulla semiretta b
(chiaramente queste sono descrizioni informali).
Si ha che ogni coppia di semirette è di uno ed uno solo dei due tipi. Diciamo che due coppie di semirette hanno orientamento concorde se sono entrambe destrorse o entrambe sinistrorse altrimenti diciamo che hanno orientamento discorde.

Questi termini si trasferiscono alle coppie ordinate $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ di vettori uscenti da uno stesso punto, non allineati.

Un primo significato geometrico del determinate di matrici 2×2 :

Teorema. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ due vettori in $\mathcal{V}_o^2$ e siano $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}$ i vettori di $\mathbb{R}^2$ che rappresentano $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rispetto ad una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$. Allora

$$\det[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}] = \pm\mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}),$$

dove $\mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è la misura dell'area del parallelogramma (eventualmente degenere) individuato da $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rispetto all'unità data dall'area del parallelogramma individuato da $\mathbf{i}, \mathbf{j}$, e il segno è + o - secondo che la coppia $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ abbia orientamento concorde o discorde con la coppia $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Un secondo significato geometrico del determinate di matrici 2×2 :

Teorema. Sia $L : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$, $L : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$ un'applicazione lineare e sia $\overline{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{L}(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ (M matrice 2×2) l'applicazione lineare che rappresenta L rispetto ad una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$. Allora

(1) L dilata le aree secondo un fattore costante, dato dal valore assoluto del determinante di M, nel senso che

$$\mathcal{A}(\mathbf{a}', \mathbf{b}') = \ |\det(M)| \ \mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

(misure delle aree dei parallelogrammi rispetto ad una stessa unità di area);

(2) L conserva l'orientamento di ciascuna coppia ordinata di vettori o inverte l'orientamento di ciascuna coppia ordinata di vettori, e ciò capita secondo che $\det(M)$ sia positivo o negativo.

Nello spazio $\mathcal{E}^3$. Consideriamo una terna ordinata (a, b, c) di semirette uscenti da uno stesso punto, non complanari.
Diciamo che la terna (a, b, c) è "destrorsa" se è possibile porre la mano destra in modo che il pollice, l'indice e il medio siano rispettivamente su a, b e c;
diciamo che la terna (a, b, c) è "sinistrorsa" se è possibile porre la mano sinistra in modo che il pollice, l'indice e il medio siano rispettivamente su a, b e c;
(chiaramente queste sono descrizioni informali).
Si ha che ogni terna di semirette è di uno ed uno solo dei due tipi. Diciamo che terne di semirette hanno orientamento concorde se sono entrambe destrorse o entrambe sinistrorse altrimenti diciamo che hanno orientamento discorde.

Questi termini si trasferiscono alle terne ordinate $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ di vettori uscenti da uno stesso punto, non complanari.

Un primo significato geometrico del determinate di matrici 3×3 :

Teorema. Siano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tre vettori in $\mathcal{V}_o^3$ e siano $\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}$ i vettori di $\mathbb{R}^3$ che rappresentano $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ rispetto ad una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$. Allora

$$\det[\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}] = \pm \mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}),$$

dove $\mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ è la misura del volume del parallepipedo (eventualmente degenere) individuato da $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ rispetto all'unità data dal volume del parallelepipedo individuato da $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e il segno è + o - secondo che la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ abbia orientamento concorde o discorde con la terna $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Un secondo significato geometrico del determinate di matrici 3×3 :

Teorema. Sia $L : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$, $L : \mathbf{a} \to \mathbf{a}'$ un'applicazione lineare e sia $\overline{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\overline{L}(\mathbf{x}) = M\mathbf{x}$ (M matrice 3×3) l'applicazione lineare che rappresenta L rispetto ad una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$. Allora

(1) L dilata i volumi secondo un fattore costante, dato dal valore assoluto del determinante di M :

$$\mathcal{V}(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = \ |\det(M)| \ \mathcal{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

(misure dei volumi dei parallelepipedi rispetto ad una stessa unità di volume);

(2) L conserva l'orientamento di ciascuna terna ordinata di vettori o inverte l'orientamento di ciascuna terna ordinata di vettori, e ciò capita secondo che $\det(M)$ sia positivo o negativo.