Lezione del 13.11; principali punti in dettaglio.

Sui vettori delle coordinate di un vettore di $\mathbb{R}^2$ rispetto alle basi di $\mathbb{R}^2$.

Sia $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ una base di $\mathbb{R}^2$. Ogni vettore $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^2$ si scrive in uno ed un solo modo come

$$\mathbf{x} = \overline{x}_1 \overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{x}_2 \overline{\mathbf{e}}_2 \qquad \overline{x}_1, \overline{x}_2 \in \mathbb{R},$$

e le coordinate $\overline{x}_1, \overline{x}_2$ di $\mathbf{x}$ rispetto alla base $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ formano un vettore $\overline{\mathbf{x}}$ di $\mathbb{R}^2$.

Esempio. Sia data la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$.

Dato un vettore di coordinate rispetto alla base, si ottiene direttamente il vettore corrispondente; ad esempio:

$$\text{dato } \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ calcolando } \mathbf{x} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \text{ si ottiene } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dato un vettore, si ottiene il vettore delle sue coordinate rispetto alla base risolvendo un'equazione in 2 incognite; ad esempio:

$$\text{dato } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ risolvendo } \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \overline{x}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \overline{x}_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ si ottiene } \overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Di seguito si dà una descrizione sintetica della relazione fra il vettore ed il vettore delle sue coordinate rispetto alla base, che dà al contempo un modo diretto per ottenerli l'uno dall'altro.

Esempio 1'. La relazione che esprime un vettore in funzione di un vettore di coordinate

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \overline{x}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \overline{x}_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

equivale alla relazione

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix};$$

moltiplicando entrambi i membri a sinistra per la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

si ottiene la relazione

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}$$

cioè

$$\begin{bmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}$$

che esprime un vettore di coordinate in funzione di un vettore.

In generale, si ha la

Proposizione. Siano $\mathbf{x}$ e $\overline{\mathbf{x}}$ in $\mathbb{R}^2$ rispettivamente un vettore ed il vettore delle sue coordinate rispetto ad una base $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ di $\mathbb{R}^2$. Allora, indicata con $\mathrm{P} = [\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2]$ la matrice che ha per colonne i vettori della base, si ha

$$\mathbf{x} = \mathrm{P}\ \overline{\mathbf{x}},$$
$$\overline{\mathbf{x}} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{x}.$$

Sulle matrici di un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè rispetto alle basi di $\mathbb{R}^2$.

Per ogni applicazione $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{L} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ lineare, quindi del tipo

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} \qquad (A \text{ matrice } 2 \times 2)$$

la relazione

$$\mathrm{L}(\overline{x}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{x}_2\overline{\mathbf{e}}_2) = \overline{y}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{y}_2\overline{\mathbf{e}}_2.$$

definisce un'applicazione $\overline{\mathrm{L}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\mathrm{L}} : \overline{\mathbf{x}} \mapsto \overline{\mathbf{y}}$ che è ancora lineare, quindi del tipo

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}} \qquad (\overline{A} \text{ matrice } 2 \times 2)$$

Ci chiediamo quale relazione sussiste fra $\overline{A}$ e A.

Posto $\mathrm{P} = [\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2]$, possiamo riassumere le relazioni fra le variabili e le matrici nella forma

$$\mathbf{y} = \mathrm{P}\overline{\mathbf{y}}, \qquad \begin{array}{c} \mathbf{y} = A\mathbf{x} \\ \\ \overline{\mathbf{y}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}} \end{array}, \qquad \mathbf{x} = \mathrm{P}\overline{\mathbf{x}}$$

Per ogni $\overline{\mathbf{y}}, \mathbf{y}, \overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x}$ in $\mathbb{R}^2$ legati da queste relazioni si ha:

$$\overline{\mathbf{y}} = \mathrm{P}^{-1}\mathbf{y} = \mathrm{P}^{-1}A\mathbf{x} = \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}\overline{\mathbf{x}}; \qquad \overline{\mathbf{y}} = \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}\overline{\mathbf{x}}.$$

Poichè la matrice associata a $\overline{\mathrm{L}}$ è unica, si ha

$$\overline{A} = \mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}$$

Osservazione. Applicando il determinante ad entrambi i membri si ha

$$\det(\overline{A}) = \det(\mathrm{P}^{-1}A\mathrm{P}) = \det(\mathrm{P}^{-1})\det(A)\det(\mathrm{P}) = \det(\mathrm{P})^{-1}\det(A)\det(\mathrm{P}) = \det(A);$$

cioè:

> il determinante della matrice che rappreseta un'applicazione lineare di $\mathbb{R}^2$ in sè rispetto ad una base di $\mathbb{R}^2$ non dipende dalla base, dipende solo dall'applicazione.

Osservazione. Analogamente, si trova che

$$A = \mathrm{P}\overline{A}\mathrm{P}^{-1}.$$

Esempi.

Esempio 2. Sia data la base $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo l'applicazione lineare $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathrm{L} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ data da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 \\ -2x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

La relazione

$$\mathrm{L}\left(\overline{x}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \overline{x}_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right) = \overline{y}_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \overline{y}_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

definisce un'applicazione $\overline{\mathrm{L}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\mathrm{L}} : \overline{\mathbf{x}} \mapsto \overline{\mathbf{y}}$ che è lineare, quindi del tipo

$$\overline{\mathbf{y}} = \overline{A}\overline{\mathbf{x}}, \qquad (\overline{A} \text{ matrice } 2 \times 2).$$

Si ha

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -10 & -24 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque $\overline{\mathrm{L}}$ è data da

$$\begin{bmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -24 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10\, \overline{x}_1 - 24\, \overline{x}_2 \\ 4\, \overline{x}_1 + 10\, \overline{x}_2 \end{bmatrix}$$

Verifica. Deve valere l'uguaglianza

$$\det \begin{bmatrix} -10 & -24 \\ 4 & 10 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \qquad -100 + 96 = -4;$$

l'uguaglianza vale.

Definizione. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$ dei vettori del piano applicati in un punto O. La "riflessione" rispetto ad una retta ℓ passante per O è l'applicazione

$$\mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}'$$

tale che il segmento PP' sia ortogonale ad ℓ ed abbia punto medio su ℓ; in particolare:
manda ogni vettore OP che sta sul ℓ in sè stesso;
manda ogni vettore OP ortogonale ad ℓ nel suo opposto.

Ogni riflessione è lineare e biiettiva; conserva lunghezze, angoli e aree, ma inverte l'orientamento. In particolare, si ha che

ogni matrice che rappresenta una riflessione ha determinante uguale a -1.

Nell'esempio seguente, identifichiamo $\mathcal{V}_o^2$ con $\mathbb{R}^2$, tramite una base ortonormale.

Esempio 3. Sia $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la riflessione rispetto alla retta ℓ di equazione $x_1 - 2x_2 = 0$. Per ciascuna base $\overline{\mathbf{e}}_1, \overline{\mathbf{e}}_2$ di $\mathbb{R}^2$ costituita da un vettore su ℓ e un vettore ortogonale ad ℓ, ad esempio

$$\overline{\mathbf{e}}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mathbf{e}}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix};$$

si ha $\mathrm{R}(\overline{\mathbf{e}}_1) = \overline{\mathbf{e}}_1$ e $\mathrm{R}(\overline{\mathbf{e}}_2) = -\overline{\mathbf{e}}_2$, dunque

$$\mathrm{R}(\overline{x}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{x}_2\overline{\mathbf{e}}_2) = \overline{x}_1\overline{\mathbf{e}}_1 - \overline{x}_2\overline{\mathbf{e}}_2.$$

La relazione

$$\mathrm{R}(\overline{x}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{x}_2\overline{\mathbf{e}}_2) = \overline{y}_1\overline{\mathbf{e}}_1 + \overline{y}_2\overline{\mathbf{e}}_2$$

definisce l'applicazione $\overline{\mathrm{R}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\overline{\mathrm{R}} : \overline{\mathbf{x}} \mapsto \overline{\mathbf{y}}$ data da

$$\begin{bmatrix} \overline{y}_1 \\ \overline{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ -\overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}.$$

La riflessione $\mathrm{R} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{R} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ è data da

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}, \qquad (A \text{ matrice } 2 \times 2)$$

con

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dunque R è data da

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Verifica. Deve valere l'uguaglianza

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = -1; \qquad -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1;$$

l'uguaglianza vale.