Lezione del 14.11; principali punti in dettaglio.

Applicazioni lineari di $\mathcal{V}_o^2$ in sè.

Quadro generale. Sia L un'applicazione lineare di $\mathcal{V}_o^2$ in sè e sia noto il valore di L sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di una base di $\mathcal{V}_o^2$; per fissare le idee, supponiamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\mathbf{i}) &= 2\ \mathbf{i} + 3\ \mathbf{j} \\ \mathrm{L}(\mathbf{j}) &= 4\ \mathbf{i} + 5\ \mathbf{j} \end{aligned}$$

Allora è noto anche il valore di L su qualsiasi vettore di $\mathcal{V}_o^2$, ed è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) &= x\mathrm{L}(\mathbf{i}) + y\mathrm{L}(\mathbf{j}) \\ &= x(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + y(4\mathbf{i} + 5\mathbf{j}) \\ &= (2x + 4y)\mathbf{i} + (3x + 5y)\mathbf{j}. \end{aligned}$$

L'applicazione L di $\mathcal{V}_o^2$ in sè è dunque rappresentata rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ dall'applicazione $\overline{\mathrm{L}}$ di $\mathbb{R}^2$ in sè

$$\overline{\mathrm{L}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + 4y \\ 3x + 5y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Osservazione. Nella prima e seconda colonna della matrice compaiono rispettivamente le coordinate di $\mathrm{L}(\mathbf{i})$ e $\mathrm{L}(\mathbf{j})$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Rotazioni. Per ogni numero reale $-\pi \leq \theta \leq \pi$, diciamo "rotazione" di angolo θ in senso antiorario centrata nel punto O l'applicazione

$$\mathrm{Rot}_\theta : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$$

tale che

$$\|\mathbf{v}'\| = \|\mathbf{v}\|; \quad \widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = |\theta|; \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \text{ è } \left\{ \begin{array}{c} \text{destrorsa} \\ \text{sinistrorsa} \end{array} \right\} \text{ per } \left\{ \begin{array}{c} 0 < \theta < \pi \\ -\pi < \theta < 0 \end{array} \right\}.$$

Estendiamo la definizione ad ogni numero reale ponendo, per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed ogni intero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\mathrm{Rot}_{\theta + 2n\pi} = \mathrm{Rot}_\theta.$$

Fatti.
(1) Ciascuna rotazione è lineare e biiettiva; di più: conserva: la lunghezza di un vettore, l'angolo fra due vettori, l'area del parallelogramma su due vettori, l'orientamento di una coppia ordinata vettori.
(2) Le rotazioni hanno le seguenti proprietà rispetto alla composizione:

$$\mathrm{Rot}_0 = \mathrm{id}; \quad \mathrm{Rot}_{\alpha+\beta} = \mathrm{Rot}_\alpha \circ \mathrm{Rot}_\beta. \quad \mathrm{Rot}_\theta^{-1} = \mathrm{Rot}_{-\theta}$$

per ogni $\alpha, \beta, \theta \in \mathbb{R}$.

Sia ora e fino ad avviso contrario $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^2$. L'idea che useremo per determinare le matrici che rappresentano le rotazioni rispetto ad una tale base si fonda sulla seguente

Osservazione. Per ciascun vettore non nullo $\mathbf{v}$ c'è uno ed un solo vettore $\mathbf{v}'$ tale che

$$\|\mathbf{v}'\| = \|\mathbf{v}\|, \quad \mathbf{v}' \perp \mathbf{v}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{v}') \text{ destrorsa;}$$

se $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$, allora $\mathbf{v}' = -b\mathbf{i} + a\mathbf{j}$.

Matrice di una rotazione. Il valore della rotazione Rot_θ di angolo θ centrata in O sui vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ è dato da

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_\theta(\mathbf{i}) &= \quad \cos\theta\ \mathbf{i} + \sin\theta\ \mathbf{j} \\ \mathrm{Rot}_\theta(\mathbf{j}) &= -\sin\theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{j} \end{aligned}$$

La prima affermazione equivale dalla definizione di seno e coseno.
La seconda affermazione segue da: l'assunzione che $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ siano vettori della stessa lunghezza che formano una coppia ortogonale destrorsa, il fatto che le rotazioni conservano queste proprietà, l'osservazione precedente.

L'applicazione Rot_θ di $\mathcal{V}_o^2$ in sè è dunque rappresentata rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ dall'applicazione $\overline{\mathrm{Rot}}_\theta$ di $\mathbb{R}^2$ in sè

$$\overline{\mathrm{Rot}}_\theta \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Osservazioni.
(1) Il fatto che ciascuna rotazione conservi l'area del parallelogramma su due vettori e la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa di una coppia ordinata di vettori si riflette nel fatto che il determinante della matrice Rot_θ è

$$\det \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$$

(2) La proprietà delle rotazioni rispetto all'operazione di composizione si riflette nella seguente proprietà delle matrici di rotazione rispetto al prodotto: per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}$$

Questa uguaglianza equivale alle formule di addizione per le funzioni coseno e seno:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\ \cos\beta\ -\ \sin\alpha\ \sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\ \cos\beta\ +\ \cos\alpha\ \sin\beta \end{aligned}$$

Scalings. Per ogni r, s numeri reali e $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ base di $\mathcal{V}_o^3$., diciamo "scaling" di coefficienti r, s su $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ l'applicazione lineare

$$\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$$

che moltiplica per r, s i vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}$,

$$\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}(\mathbf{i}) = r\mathbf{i}, \quad \mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}(\mathbf{j}) = s\mathbf{j}.$$

e quindi sul generico vettore agisce come

$$\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = rx\mathbf{i} + sy\mathbf{j}.$$

Rispetto alla base $\mathbf{i},\mathbf{j}$, lo scaling $\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}$ è rappresentato dalla matrice

$$\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

A parole: l'applicazione di scaling di coefficienti r,s su una data base ha matrice (rispetto a tale base) diagonale, con elementi diagonali r,s.

Dal significato geometrico del determinante, si ha che $\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}$
è biiettivo se e solo se r ed s sono $\neq 0$;
trasforma le aree moltiplicandole per $|rs|$;
conserva l'orientamento se e solo se r ed s sono concordi.

Alcuni casi particolari:

$(r,s)=(r,r)$: dilatazione di coefficiente r con centro O;

$(r,s)=(1,0)$: proiezione sulla retta di $\mathbf{i}$ parallelamente alla retta di $\mathbf{j}$;

$(r,s)=(0,1)$: proiezione sulla retta di $\mathbf{j}$ parallelamente alla retta di $\mathbf{i}$;

$(r,s)=(1,-1)$: riflessione rispetto alla retta di $\mathbf{i}$ parallelamente alla retta di $\mathbf{j}$.

Esempi.

Qui di seguito, fissata una base ortonormale destrorsa $\mathbf{i},\mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, consideriamo alcune rotazioni attorno ad O, scaling su $\mathbf{i},\mathbf{j}$ e le matrici che le rappresentano rispetto a $\mathbf{i},\mathbf{j}$. Scriviamo in breve $\mathrm{S}_{r,s}$ al posto di $\mathrm{S}_{r,s;\mathbf{i},\mathbf{j}}$.

applicazione	matrice
$\mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{4}}$	$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
$\mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{3}}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
$\mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{4}} \circ \mathrm{S}_{1,-1}$	$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$
$\mathrm{S}_{1,-1} \circ \mathrm{Rot}_{\frac{\pi}{4}}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

Applicazioni lineari di $\mathcal{V}_o^3$ in sè.

Quadro generale. Sia L un'applicazione lineare di $\mathcal{V}_o^3$ in sè e sia noto il valore di L sui vettori $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ di una base di $\mathcal{V}_o^3$; per fissare le idee, supponiamo che

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\mathbf{i}) &= 2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j}+4\,\mathbf{k} \\ \mathrm{L}(\mathbf{j}) &= 4\,\mathbf{i}+5\,\mathbf{j}+6\,\mathbf{k} \\ \mathrm{L}(\mathbf{k}) &= 6\,\mathbf{i}+7\,\mathbf{j}+8\,\mathbf{k} \end{aligned}$$

Allora è noto anche il valore di L su qualsiasi vettore di $\mathcal{V}_o^3$, ed è dato da

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) &= x\mathrm{L}(\mathbf{i})+y\mathrm{L}(\mathbf{j})+z\mathrm{L}(\mathbf{k}) \\ &= x(2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k})+y(4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k})+z(6\mathbf{i}+7\mathbf{j}+8\mathbf{k}) \\ &= (2x+4y+6z)\mathbf{i}+(3x+5y+7z)\mathbf{j}+(4x+6y+8z)\mathbf{k};\end{aligned}$$

L'applicazione L di $\mathcal{V}_o^3$ in sè è dunque rappresentata rispetto alla base $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ dall'applicazione $\overline{\mathrm{L}}$ di $\mathbb{R}^3$ in sè

$$\overline{\mathrm{L}}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+4y+6z \\ 3x+5y+7z \\ 4x+6y+8z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Osservazione. Nella prima, seconda, terza colonna della matrice compaiono rispettivamente le coordinate di $\mathrm{L}(\mathbf{i})$, $\mathrm{L}(\mathbf{j}), \mathrm{L}(\mathbf{k})$ rispetto alla base $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$.

Rotazioni. Per ogni numero reale $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed ogni versore $\mathbf{a} \in \mathcal{V}_o^3$ diciamo "rotazione" di angolo θ in senso antiorario attorno ad $\mathbf{a}$ l'applicazione lineare

$$\mathrm{Rot}_{\theta;\ \mathbf{a}} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$$

tale che

(0) $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$;

(1) se $\mathbf{v} \perp \mathbf{a}$ allora $\mathbf{v}' \perp \mathbf{a}$ e

$$\|\mathbf{v}'\| = \|\mathbf{v}\|; \quad \widehat{\mathbf{v}\mathbf{v}'} = |\theta|; \quad (\mathbf{a},\mathbf{v},\mathbf{v}') \text{ è } \left\{\begin{array}{c}\text{destrorsa} \\ \text{sinistrorsa}\end{array}\right\} \text{ per } \left\{\begin{array}{c} 0<\theta<\pi \\ -\pi<\theta<0 \end{array}\right\}.$$

Estendiamo la definizione ad ogni numero reale ponendo, per ogni $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ed ogni intero $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$\mathrm{Rot}_{\theta+2n\pi;\ \mathbf{a}} = \mathrm{Rot}_{\theta;\ \mathbf{a}}.$$

Fatti.
(1) Ciascuna rotazione è (lineare e) biiettiva; di più: conserva: la lunghezza di un vettore, l'angolo fra due vettori, il volume del parallelepipedo su tre vettori, l'orientamento di una terna ordinata vettori.
(2) Le rotazioni sullo spazio con uno stesso asse hanno le stesse proprietà rispetto alla composizione delle rotazioni sul piano con uno stesso centro.

Sia $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^3$. Le matrici che rappresentano le rotazioni attorno ai tre versori della base sono date da

$$\text{per } \mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{i}}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{per } \mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{j}}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\text{per } \mathrm{Rot}_{\theta;\mathbf{k}}, \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$