Lezione del 21.11; principali punti in dettaglio.

Applicazioni di $\mathcal{E}^3$ in sè, di $\mathcal{V}_o^3$ in sè, di $\mathbb{R}^3$ in sè.

Esempi. Alcune applicazioni di $\mathcal{E}^3$ in sè:

(1) Proiezione ortogonale su una retta r e su un piano π

$$\mathrm{P}_r : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} \mathrm{P}' \in r \\ \mathrm{PP}' \perp r \end{cases}$$

$$\mathrm{P}_\pi : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} \mathrm{P}' \in \pi \\ \mathrm{PP}' \perp \pi \end{cases}$$

Nessuna proiezione è biiettiva.

(2) Riflessione rispetto a un punto C e riflessione ortogonale rispetto a una retta r e rispetto a un piano π

$$\mathrm{R_C} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \text{ (punto medio di PP}') = \mathrm{C}$$

$$\mathrm{R}_r : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} \text{(punto medio di PP}') \in r \\ \mathrm{PP}' \perp r \end{cases}$$

$$\mathrm{R}_\pi : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} \text{(punto medio di PP}') \in \pi \\ \mathrm{PP}' \perp \pi \end{cases}$$

Ciascuna riflessione è biiettiva, conserva lunghezze di segmenti, angoli, e volumi. Le riflessioni rispetto a un punto e rispetto a un piano invertono l'orientamento; le riflessioni rispetto ad una retta conservano l'orientamento.

(3) Traslazione secondo un vettore $\mathbf{c}$

$$\mathrm{T}_\mathbf{c} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \ \mathrm{PP}' \sim \mathbf{c}.$$

Ciascuna traslazione è biiettiva, conserva lunghezze di segmenti, angoli, volumi ed orientamento.

Applicazioni di $\mathcal{E}^3$ in sè e di $\mathcal{V}_o^3$ in sè. Sia fissato un punto O in $\mathcal{E}^3$. Associamo a ciascun punto P il vettore OP posizione di P rispetto ad O; in questo modo abbiamo una biiezione fra $\mathcal{E}^3$ e $\mathcal{V}_o^3$. Associamo a ciascuna applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$$

l'applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}'$$

(abuso di notazione); in questo modo abbiamo una biiezione fra l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{E}^3$ in sè e l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{V}_o^3$ in sè.

Richiami. Applicazioni di $\mathcal{V}_o^3$ in sè e di $\mathbb{R}^3$ in sè. Sia fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$. Associamo a ciascun vettore $\mathbf{v}$ il vettore $\mathbf{x}$ delle sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; in questo modo abbiamo una biiezione fra $\mathcal{V}_o^3$ ed $\mathbb{R}^3$. Associamo a ciascuna applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$$

l'applicazione

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$$

(abuso di notazione) dove $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ son i vettori delle coordinate di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$; in questo modo abbiamo una biiezione fra l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{V}_o^3$ in sè e l'insieme delle applicazioni di $\mathbb{R}^3$ in sè. Un'applicazione è lineare se e solo se l'applicazione ad essa associata è lineare; in tal caso

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

con A matrice 3×3 avente nella prima, seconda e terza colonna rispettivamente le coordinate di $\mathbf{i}', \mathbf{j}'$ e $\mathbf{k}'$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Esempio. Consideriamo la riflessione di punti rispetto ad un punto C

$$\mathrm{R_C} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \text{ (punto medio di PP}') = \mathrm{C};$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{R_C} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}' : \text{ (punto medio di PP}') = \mathrm{C}.$$

Se $\mathrm{O} = \mathrm{C}$, questa è la riflessione di vettori

$$\mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}' = -\mathrm{OP}$$

che è lineare; in tal caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathrm{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{R} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = -\mathbf{x},$$

e $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poichè R conserva i volumi e inverte l'orientamento, si deve avere $\det(A) = -1$, e così è.

Se $\mathrm{O} \neq \mathrm{C}$, allora l'applicazione $\mathrm{R_C} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ non è lineare.

Esempio. Consideriamo la riflessione ortogonale di punti rispetto ad una retta r

$$\mathrm{R}_r : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} \text{(punto medio di PP}') \in r \\ \mathrm{PP}' \perp r \end{cases}$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{R}_r : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}' : \begin{cases} \text{(punto medio di PP}') \in r \\ \mathrm{PP}' \perp r \end{cases}$$

Se $\mathrm{O} \in r$, questa è la riflessione ortogonale di vettori rispetto alla retta r, che è lineare; in tal caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathrm{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$, si ha un'applicazione

$$\mathrm{R}_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = A\mathbf{x};$$

se $\mathbf{i}$ sta su r e $\mathbf{j}, \mathrm{k}$ sono ortogonali ad r, allora

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = -\mathbf{j} \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}$$

e dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poichè R_r conserva i volumi e l'orientamento, si deve avere $\det(A) = 1$, e così è.

Se $\mathrm{O} \notin r$, allora l'applicazione $\mathrm{R}_r : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ non è lineare.

Esempio. Consideriamo la riflessione ortogonale di punti rispetto ad un piano π

$$\mathrm{R}_\pi : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \begin{cases} (\text{punto medio di PP}') \ \in \pi \\ \mathrm{PP}' \perp \pi \end{cases}$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{R}_\pi : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}' : \begin{cases} (\text{punto medio di PP}') \ \in \pi \\ \mathrm{PP}' \perp \pi \end{cases}$$

Se $\mathrm{O} \in \pi$, questa è la riflessione ortogonale di vettori rispetto al piano π, che è lineare; in tal caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathrm{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$, si ha un'applicazione

$$\mathrm{R}_\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = A\mathbf{x};$$

se $\mathbf{i}, \mathrm{j}$ stanno su π e k è ortogonale a π, allora

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j} \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{k}$$

e dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Poichè R_π conserva i volumi e inverte l'orientamento, si deve avere $\det(A) = -1$, e così è.

Se $\mathrm{O} \notin \pi$, allora l'applicazione $\mathrm{R}_\pi : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ non è lineare.

Esempio. Consideriamo l'applicazione di traslazione tramite un vettore $\mathbf{c}$

$$\mathrm{T}_\mathbf{c} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \ \mathrm{PP}' \sim \mathbf{c};$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^3$ e pensato $\mathbf{c} \in \mathcal{V}_o^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{T}_\mathbf{c} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{c};$$

questa applicazione è lineare solo nel caso banale $\mathbf{c} = \mathbf{0}$.
In ogni caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{T}_\mathbf{c} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c};$$

si ha

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{c}$$

dove

$$A = \mathrm{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Applicazioni lineari affini di $\mathcal{E}^2$ in sè.

Le proiezioni ortogonali, le riflessioni, e le traslazioni sono casi particolari di applicazioni lineari affini, nel senso della seguente

Definizione. Un'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{E}^3 \to \mathcal{E}^3$ si dice "applicazione lineare affine" se esiste un punto O in $\mathcal{E}^3$ rispetto al quale è rappresentata da un'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ del tipo

$$\mathrm{F}(\mathbf{v}) = \mathrm{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{d}$$

dove $\mathrm{L} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ è un'applicazione lineare e $\mathbf{d}$ è un vettore in $\mathcal{V}_o^3$; sinteticamente:

$$\mathrm{F} = \mathrm{T}_{\mathbf{d}} \circ \mathrm{L},$$

dove $\mathrm{T}_{\mathbf{d}} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ è la traslazione associata a $\mathbf{d}$.

In tal caso, per ciascuna base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ di $\mathcal{V}_o^3$ l'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^3 \to \mathcal{V}_o^3$ è rappresentata dall'applicazione $\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathrm{F}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

sono la matrice di L e le coordinate del vettore $\mathbf{d}$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

Osservazione. Poichè le traslazioni sono biiettive e conservano le lunghezze, gli angoli, i volumi e l'orientamento, si ha che F possiede una di queste proprietà se e solo se L la possiede; per il significato geometrico del determinante, in particolare si ha:

F è biiettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$;

F conserva volumi ed orientamento se e solo se $\det(A) = 1$;

F conserva volumi ed inverte l'orientamento se e solo se $\det(A) = -1$.

Due riflessioni, in coordinate non adattate.

In questa parte, $\mathcal{E}^3$ e $\mathcal{V}_o^3$ siano identificati con $\mathbb{R}^3$, tramite un sistema di riferimento $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ cartesiano ortogonale monometrico.

(1) Determiniamo l'applicazione

$$\mathrm{R}_{\mathrm{C}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \mathrm{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

di riflessione ortogonale rispetto a un punto $\mathrm{C} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix}$.

Per ogni punto P, il punto P′ è la soluzione dell'equazione

$$\frac{1}{2}(\mathrm{P}+\mathrm{P}')=\mathrm{C};$$

cioè

$$\mathrm{P}'=2\mathrm{C}-\mathrm{P};$$

in coordinate, x', y', z' sono date in funzione di x, y, z da

$$\begin{cases} x' &=& 2x_0 - x \\ y' &=& 2y_0 - y \\ z' &=& 2z_0 - z \end{cases}.$$

In altri termini

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{bmatrix}.$$

Una verifica. Poichè ogni riflessione rispetto ad un punto conserva volumi ed inverte l'orientamento, la matrice dei coefficienti di x, y, z deve avere determinante -1, cioè

$$\det \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1;$$

questa uguaglianza è vera.

(2) Consideriamo la retta di equazione parametrica

$$r: \begin{cases} x = \frac{1}{2} + t \\ y = \frac{1}{2} - t \\ z = 0 \end{cases};$$

su questa equazione leggiamo che $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ è un vettore direttore di r.

Determiniamo l'applicazione

$$\mathrm{R}_r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \mathrm{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

di riflessione ortogonale rispetto ad r.

Per ogni punto P, il punto P′ è la soluzione del sistema

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\mathrm{P}+\mathrm{P}') \in r \\ (\mathrm{P}'-\mathrm{P})\cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases};$$

in coordinate: per ogni terna di coordinate x, y, z, la terna di coordinate x', y', z' è soluzione del sistema parametrico

$$\begin{cases} \frac{x'+x}{2} & = & \frac{1}{2}+t \\ \frac{y'+y}{2} & = & \frac{1}{2}-t \\ \frac{z'+z}{2} & = & 0 \\ x'-x-y'+y & = & 0 \end{cases};$$

da questo sistema si può ricavare ciascuna variabile x', y', z', t in funzione delle variabili x, y, z; a noi interessa solo esprimere x', y', z' in funzione di x, y, z.

Dalle prime tre equazioni ricaviamo x', y', z' in funzione di x, y, z, t

$$\begin{cases} x' & = & 1+2t-x \\ y' & = & 1-2t-y \\ z' & = & -z \end{cases};$$

sostituiamo queste espressioni nella quarta equazione del sistema ed otteniamo

$$4t-2x+2y=0;$$

da questa equazione ricaviamo

$$t=\frac{x-y}{2};$$

sostituiamo nelle prime tre equazioni del sistema ed otteniamo

$$\begin{cases} x' & = & 1-y \\ y' & = & 1-x \\ z' & = & -z \end{cases}$$

In altri termini

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Una verifica. Poichè ogni riflessione rispetto ad una retta conserva volumi ed orientamento, la matrice dei coefficienti di x, y, z deve avere determinante 1, cioè

$$\det \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1;$$

questa uguaglianza è vera.