Lezione del 20.11; principali punti in dettaglio.

Punto medio di un segmento. Siano A, B due punti in $\mathcal{E}^2$. Il punto medio M del segmento AB è caratterizzato dalla condizione che il vettore AM sia equivalente al vettore MB

$$\mathrm{AM} \sim \mathrm{MB};$$

fissato un punto O, questa condizione si esprime come uguaglianza fra vettori in $\mathcal{V}_o^2$

$$\mathrm{OM} - \mathrm{OA} = \mathrm{OB} - \mathrm{OM};$$

da quest'uguaglianza si può ricavare ciascuno dei tre vettori in funzione degli altri due: si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{OB} &= 2\ \mathrm{OM} - \mathrm{OA} \\ \mathrm{OM} &= \frac{1}{2}\ \mathrm{OA} + \frac{1}{2}\ \mathrm{OB} \\ \mathrm{OA} &= 2\ \mathrm{OM} - \mathrm{OB} \end{aligned}$$

Fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ in $\mathcal{V}_o^2$, ciascuna di queste uguaglianze si esprime in termini di vettori numerici. In particolare, la seconda si esprime come

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

e nelle singole coordinate come

$$\begin{cases} m_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \\ m_2 = \frac{a_2+b_2}{2} \end{cases}$$

Applicazioni di $\mathcal{E}^2$ in sè, di $\mathcal{V}_o^2$ in sè, di $\mathbb{R}^2$ in sè.

Esempi. Alcune applicazioni di $\mathcal{E}^2$ in sè:

(1) la proiezione ortogonale di un punto P su una retta r è il punto P$'$ caratterizzato dalle condizioni

$$\mathrm{P}' \in r, \quad \mathrm{PP}' \perp r$$

(con $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$ per $\mathrm{P} \in r$); in altri termini, P$'$ è l'intersezione della retta che passa per P ed è ortogonale ad r con la retta r; fissata la retta r, si ha l'applicazione "proiezione ortogonale su r"

$$\mathrm{P}_r : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' = (\text{proiez. ortog. di P su } r);$$

più in generale si definisce la proiezione su una retta secondo una direzione (diversa da quella della retta).

(2) la riflessione ortogonale di un punto P rispetto ad una retta r è il punto P$'$ caratterizzato dalle condizioni

$$(\text{punto medio fra P e P}') \in r, \quad \mathrm{PP}' \perp r$$

(con $\mathrm{P}' = \mathrm{P}$ per $\mathrm{P} \in r$); fissata la retta r, si ha l'applicazione "riflessione ortogonale rispetto ad r"

$$\mathrm{R}_r : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' = (\text{rifl. ortog. di P risp. ad } r);$$

più in generale si definisce la riflessione rispetto ad una retta secondo una direzione (diversa da quella della retta).

(3) il traslato di un punto P tramite un vettore $\mathbf{c}$ è il punto P' finale dell'unico vettore applicato in P equivalente a $\mathbf{c}$, cioè tale che

$$\mathrm{PP}' \sim \mathbf{c};$$

fissato il vettore $\mathbf{c}$, si ha l'applicazione "traslazione tramite $\mathbf{c}$"

$$\mathrm{T}_{\mathbf{c}} : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' = (\text{trasl. di P tramite } \mathbf{c}).$$

Applicazioni di $\mathcal{E}^2$ in sè e di $\mathcal{V}_o^2$ in sè. Sia fissato un punto O in $\mathcal{E}^2$. Associamo a ciascun punto P il vettore OP posizione di P rispetto ad O; in questo modo abbiamo una biiezione fra $\mathcal{E}^2$ e $\mathcal{V}_o^2$. Associamo a ciascuna applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$$

l'applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}'$$

(abuso di notazione: si è usato lo stesso simbolo per indicare due applicazioni diverse); in questo modo abbiamo una biiezione fra l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{E}^2$ in sè e l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{V}_o^2$ in sè.

Richiami. Applicazioni di $\mathcal{V}_o^2$ in sè e di $\mathbb{R}^2$ in sè. Sia fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$. Associamo a ciascun vettore $\mathbf{v}$ il vettore $\mathbf{x}$ delle sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$; in questo modo abbiamo una biiezione fra $\mathcal{V}_o^2$ ed $\mathbb{R}^2$. Associamo a ciascuna applicazione

$$\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}'$$

l'applicazione

$$\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}'$$

(abuso di notazione) dove $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ son i vettori delle coordinate di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$; in questo modo abbiamo una biiezione fra l'insieme delle applicazioni di $\mathcal{V}_o^2$ in sè e l'insieme delle applicazioni di $\mathbb{R}^2$ in sè. Un'applicazione è lineare se e solo se l'applicazione ad essa associata è lineare; in tal caso

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$$

con A matrice 2×2 avente nella prima e seconda colonna rispettivamente le coordinate di i' e j' rispetto alla base i, j.

Esempio. Consideriamo l'applicazione proiezione ortogonale di punti su una retta r

$$\mathrm{P}_r : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}';$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^2$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{P}_r : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathrm{OP} \mapsto \mathrm{OP}';$$

se $\mathrm{O} \in r$, questa è l'applicazione proiezione ortogonale di vettori sulla retta r, che è lineare; in tal caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, si ha un'applicazione

$$\mathrm{P}_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = A\mathbf{x};$$

se $\mathbf{i}$ sta su r e $\mathbf{j}$ è ortogonale ad r, allora

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{0}$$

e dunque

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se $\mathrm{O} \notin r$, allora l'applicazione $\mathrm{P}_r : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ non è lineare.

Esempio. Consideriamo l'applicazione di traslazione tramite un vettore $\mathbf{c}$

$$\mathrm{T}_{\mathbf{c}} : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2, \quad \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}' : \ \mathrm{PP}' \sim \mathbf{c};$$

fissato un punto $\mathrm{O} \in \mathcal{E}^2$ e pensato $\mathbf{c} \in \mathcal{V}_o^2$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{T}_{\mathbf{c}} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2, \quad \mathbf{v} \mapsto \mathbf{v}' = \mathbf{v} + \mathbf{c};$$

questa applicazione è lineare solo nel caso banale $\mathbf{c} = \mathbf{0}$

(infatti:

da una parte si ha $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)' = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{c}$,

dall'altra parte si ha $(\mathbf{v}_1)' + (\mathbf{v}_2)' = \mathbf{v}_1 + \mathbf{c} + \mathbf{v}_2 + \mathbf{c}$,

le due espressioni sono uguali solo nel caso $\mathbf{c} = \mathbf{0}$);

in ogni caso, fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$, si ha l'applicazione

$$\mathrm{T}_{\mathbf{c}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{c};$$

esplicitamente,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Una proiezione ortogonale e una riflessione, in coordinate non adattate.

In questa parte, $\mathcal{E}^2$ e $\mathcal{V}_o^2$ siano identificati con $\mathbb{R}^2$, tramite un sistema di riferimento $\mathrm{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}$ cartesiano ortogonale monometrico.

Consideriamo la retta di equazione cartesiana

$$r : \ x - 2y + 2 = 0;$$

su questa equazione leggiamo che $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ è un vettore normale ad r.

(1) Determiniamo l'applicazione

$$\mathrm{P}_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \mathrm{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

di proiezione ortogonale su r.

Il punto $\mathbf{P}'$ è l'intersezione della retta per $\mathbf{P}$ ortogonale ad r con la retta r :

$$\begin{cases} \mathrm{P}' = \mathrm{P} + t\ \mathbf{n} \\ \mathrm{P}' \in r \end{cases};$$

le coordinate x', y' di P' si ottengono dalle coordinate x, y di P risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x' = x + t \\ y' = y - 2t \\ x' - 2y' + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituiamo le espressioni di x' e y' nella terza equazione

$$x + t - 2(y - 2t) + 2 = 0;$$

risolviamo rispetto a t

$$t = -\frac{1}{5}\ x + \frac{2}{5}\ y - \frac{2}{5};$$

sostituiamo questa espressione di t nelle prime due equazioni ed otteniamo

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}\ x + \frac{2}{5}\ y - \frac{2}{5} \\ y' = \frac{2}{5}\ x + \frac{1}{5}\ y + \frac{4}{5} \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}.$$

Osservazione: x' e y' sono polinomi di primo grado (non omogenei) in x e y; la matrice dei coefficienti di x e y ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{4}{5} - \frac{4}{5} = 0.$$

(2) Determiniamo l'applicazione

$$\mathrm{R}_r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{P} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \mathrm{P}' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

di riflessione ortogonale rispetto ad r.

P' è il punto della retta per P ortogonale ad r tale che il punto medio del segmento PP' stia su r :

$$\begin{cases} \mathrm{P}' = \mathrm{P} + t\ \mathbf{n} \\ (\mathrm{P} + \mathrm{P}')/2\ \in r \end{cases};$$

le coordinate di P' sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = x + t \\ y' = y - 2t \\ \frac{x+x'}{2} - 2\ \frac{y+y'}{2} + 2 = 0. \end{cases}$$

Sostituiamo le espressioni di x' e y' nella terza equazione

$$\frac{2x+t}{2} - 2\ \frac{2y-2t}{2} + 2 = 0;$$

risolviamo rispetto a t,

$$t = -\frac{2}{5}\ x + \frac{4}{5}\ y - \frac{4}{5};$$

sostituiamo questa espressione di t nelle prime due equazioni ed otteniamo

$$\begin{cases} x' = \frac{3}{5}\ x + \frac{4}{5}\ y - \frac{4}{5} \\ y' = \frac{4}{5}\ x - \frac{3}{5}\ y + \frac{8}{5} \end{cases}$$

Dunque

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

Osservazione: x' e y' sono polinomi di primo grado (non omogenei) in x e y; la matrice dei coefficienti di x ey ha determinante

$$\det \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = -\frac{9}{25} - \frac{16}{25} = -1.$$

Applicazioni lineari affini di $\mathcal{E}^2$ in sè.

Definizione. Un'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ si dice "applicazione lineare affine" se esiste un punto O in $\mathcal{E}^2$ rispetto al quale è rappresentata da un'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ del tipo

$$\mathrm{F}(\mathbf{v}) = \mathrm{L}(\mathbf{v}) + \mathbf{c}$$

dove $\mathrm{L} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ è un'applicazione lineare e $\mathbf{c}$ è un vettore in $\mathcal{V}_o^2$; sinteticamente:

$$\mathrm{F} = \mathrm{T}_{\mathbf{c}} \circ \mathrm{L},$$

dove $\mathrm{T}_{\mathbf{c}} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ è la traslazione associata a $\mathbf{c}$.
In tal caso, per ciascuna base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ di $\mathcal{V}_o^2$ l'applicazione $\mathrm{F} : \mathcal{V}_o^2 \to \mathcal{V}_o^2$ è rappresentata dall'applicazione $\mathrm{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ data da

$$\mathrm{F} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

dove

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

sono la matrice di L e le coordinate del vettore $\mathbf{c}$ rispetto alla base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$.

Osservazione. Poichè le traslazioni sono biiettive e conservano le lunghezze, gli angoli, le aree e la proprietà di essere destrorsa o sinistrorsa, si ha che F possiede una di queste proprietà se e solo se L la possiede; per il significato geometrico del determinante, in particolare si ha:

F è biiettiva se e solo se $\det(A) \neq 0$;

F conserva aree ed orientamento se e solo se $\det(A) = 1$;

F conserva aree ed inverte l'orientamento se e solo se $\det(A) = -1$.