Prodotto vettoriale.

Richiami sull'ortogonale destrorso di un vettore nel piano.

Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$. Per ciascun vettore $\mathbf{a}$ c'è uno ed un solo vettore $\mathbf{a}'$ tale che

$$\|\mathbf{a}'\| = \|\mathbf{a}\|, \quad \mathbf{a}' \perp \mathbf{a}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}') \text{ destrorsa}$$

(si intende che $\mathbf{0}' = \mathbf{0}$). Fissata una base $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^2$, se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j}$, allora

$$\mathbf{v}' = -a_2\mathbf{i} + a_1\mathbf{j};$$

questa uguaglianza si può riscrivere come

$$\mathbf{a}' = \det \begin{bmatrix} a_1 & \mathbf{i} \\ a_2 & \mathbf{j} \end{bmatrix}.$$

Prodotto vettoriale di due vettori nello spazio.

Per ogni una ordinata $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ di vettori in $\mathcal{V}_o^3$, c'è uno ed un solo vettore $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ tale che

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ &\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}, \\ &(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) \text{ destrorsa.} \end{aligned}$$

dove $\mathcal{A}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ è l'area del parallelogramma su $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ (si intende che per due vettori allineati si abbia $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$).

Si dice che $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è il "prodotto vettoriale" di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$.

Si prova che questo prodotto di vettori è legato alle operazioni di somma di vettori e prodotto di scalari per vettori dalle proprietà

$$\begin{aligned} &(1) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{c} \times \mathbf{b} \\ &(2) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ &(3) \quad \mathbf{a} \times (\gamma\mathbf{b}) = (\gamma\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \\ &(4) \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}. \end{aligned}$$

per ogni $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ in $\mathcal{V}_o^3$ e γ in $\mathbb{R}$.

Segue direttamente dalla definizione che la tabella dei prodotti vettoriali dei vettori i, j, k di una base ortonormale destrorsa di $\mathcal{V}_o^3$ è

	$\mathbf{i}$	$\mathbf{j}$	$\mathbf{k}$
$\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{k}$	$-\mathbf{j}$
$\mathbf{j}$	$-\mathbf{k}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{i}$
$\mathbf{k}$	$\mathbf{j}$	$-\mathbf{i}$	$\mathbf{0}$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale e da questa tabella si ricava che se $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & \mathbf{i} \\ a_2 & b_2 & \mathbf{j} \\ a_3 & b_3 & \mathbf{k} \end{bmatrix}.$$

Esempio. Se $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, allora

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \det \begin{bmatrix} 2 & 5 & \mathbf{i} \\ 3 & 6 & \mathbf{j} \\ 4 & 7 & \mathbf{k} \end{bmatrix} = -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

Il vettore prodotto trovato deve essere ortogonale ai due vettori fattori, cioè

$$\begin{aligned} (-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = 0, &\quad -6 + 18 - 12 = 0; \\ (-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}) = 0, &\quad -15 + 36 - 21 = 0; \end{aligned}$$

verificato. Si lascia al lettore di verificare che la terna $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ è destrorsa.
Dalla definizione di prodotto vettoriale si ha che l'area del parallelogramma sui lati $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ è

$$\begin{aligned} \| -3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\| &= \sqrt{(-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \cdot (-3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k})} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 6^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{54}. \end{aligned}$$