Lezione del 28.11; principali punti in dettaglio.

Intervalli. Notazione per gli intervalli sulla retta reale:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x \le b\} \\
[a,+\infty[&= \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x\} \\
]-\infty,b] &= \{x \in \mathbb{R} :\ x \le b\} \\
[a,b[&= \{x \in \mathbb{R} :\ a \le x < b\} \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

Considereremo funzioni $f : A \to B$, con $A, B \subseteq \mathbb{R}$; molto spesso $B = \mathbb{R}$ e spesso A sarà un intervallo, o un'unione finita di intervalli. Si definisce

$$(\text{grafico di } f) \ = \ \{(x,y) \in A \times B :\ y = f(x)\} = \{(x, f(x)) :\ x \in A\}\,;$$

viene pensato come una linea del piano, la prima descrizione ne dà un'equazione cartesiana e la seconda un'equazione parametrica.

(Interpretazione cinematica: f descrive il moto di un punto materiale: in ciascun istante $x \in A$ il punto materiale si trova in un corrispondente punto $f(x) \in B$.)

Esempio 1. Ciascuna funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q$$

$(m, q$ costanti in $\mathbb{R})$ ha come grafico una retta, che ha le seguenti equazioni cartesiana e parametrica

$$y = mx + q, \qquad \begin{cases} x = t \\ y = mt + q \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.;$$

è la retta che passa per il punto $(0, q)$ ed ha vettore direttore $(1, m)$. Viceversa, ogni retta non parallela al secondo asse è il grafico di una funzione di questo tipo.

Esempio 2. Ciascuna funzione

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = ax^2 + bx + c$$

$(a, b, c$ costanti in $\mathbb{R}$ con $a \neq 0)$ ha come grafico una parabola, la parabola che ha equazione cartesiana $y = ax^2 + bx + c$. La parabola ha asse parallelo all'asse delle y ed ha concavità rivolta verso l'alto o il basso rispettivamente secondo che a sia positivo o negativo. Viceversa, ogni parabola con asse parallelo al secondo asse è il grafico di una funzione di questo tipo.

Definizione. Una funzione polinomiale, in breve un polinomio, è una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tale che per ogni $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

dove $a_n, \ldots, a_1, a_0$ sono costanti in $\mathbb{R}$. Si prova che queste costanti sono univocamente determinate da f (principio di identità dei polinomi). Se $a_n \neq 0$ si dice che f ha grado n.

Un numero $r \in \mathbb{R}$ si dice radice del polinomio f se $f(r) = 0$. Una funzione polinomiale di primo grado $f(x) = ax + b$ (a, b costanti, $a \neq 0$) ha sempre una ed una sola radice. Una funzione polinomiale di secondo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c costanti, $a \neq 0$) ha due radici reali distinte, due radici reali coincidenti, o nessuna radice reale, secondo che il discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ sia maggiore o uguale o minore di 0.
In generale, si ha

Proposizione. Una funzione polinomiale di grado n ha al più n radici reali distinte.

Continuità. Secondo una definizione molto informale, una funzione su un intervallo si dice "continua" se il suo grafico può essere tracciato senza staccare la penna dal foglio. Si ha la

Proposizione. Ogni funzione polinomiale è continua su $\mathbb{R}$.

Una proprietà notevole delle funzioni continue è data dal

Teorema (dei valori intermedi e degli zeri). Sia $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo I e siano $x_1, x_2 \in \mathrm{I}$, allora:

(1) per ogni y^* nell'intervallo di estremi $f(x_1), f(x_2)$ esiste almeno un x^* nell'intervallo di estremi x_1, x_2 tale che $f(x^*) = y^*$; in particolare:

(2) se $f(x_1)$ ed $f(x_2)$ sono uno positivo e l'altro negativo allora esiste un x^* nell'intervallo di estremi x_1, x_2 tale che $f(x^*) = 0$.

Questi fatti rendono possibile dare risoluzioni approssimate (con qualsiasi grado di approssimazione) di equazioni polinomiali. Un primo modo grezzo è illustrato nel seguente

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 - 3x + 1.$$

Si ha:

$f(0) > 0$ e $f(1) < 0$, dunque f ha una radice in $]0, 1[$;

$f(\frac{1}{2}) < 0$, dunque f ha una radice in $]0, \frac{1}{2}[$;

$f(\frac{1}{4}) > 0$, dunque f ha una radice in $]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$;

$f(\frac{3}{8}) < 0$, dunque f ha una radice in $]\frac{1}{4}, \frac{3}{8}[$;

...

Derivata di una funzione in un punto.

Pendenza di un segmento, e di una retta. Siano $\mathrm{P}_1 = (x_1, y_1)$ e $\mathrm{P}_2 = (x_2, y_2)$ due punti distinti tali che la retta che li congiunge non sia parallela al secondo asse, cioè tali che $x_1 \neq x_2$. Si dice "pendenza del segmento" $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ il rapporto dell'incremento delle seconde coordinate sull'incremento delle prime coordinate

$$(\text{pendenza di } \ \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1};$$

notiamo che per definire la pendenza del segmento abbiamo dovuto scegliere un ordine fra i due estremi, ma questa scelta è irrilevante (scambiando P_1 con P_2 il numeratore ed il denominatore cambiano segno, dunque il quoziente rimane invariato). Si ha:

> due segmenti (ciascuno non ridotto a un punto e non parallelo al secondo asse) stanno su due rette parallele in senso lato se e solo se hanno la stessa pendenza

In particolare,

> tutti i segmenti (non ridotti a un punto) che stanno su una stessa retta (non parallela al secondo asse) hanno la stessa pendenza; questa pendenza comune dei segmenti si dice "pendenza della retta".

Dati un punto $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ ed un numero reale m esiste una ed una sola retta che passa per P_0 ed ha pendenza m. La retta può essere costruita come la retta per il punto $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ ed il punto $\mathrm{P}_1 = (x_0 + 1, y_0 + m)$, e può essere rappresentata con un'equazione come segue: un punto $\mathrm{P} = (x, y)$ diverso dal punto $\mathrm{P}_0 = (x_0, y_0)$ sta sulla retta se e solo se

$$(\text{pendenza di } \mathrm{P}_0\mathrm{P}) = m, \quad \text{cioè} \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} = m,$$

e un punto $\mathrm{P} = (x, y)$ sta sulla retta se e solo se

$$y - y_0 = m(x - x_0).$$

Derivata di una funzione in un punto. Sia data una funzione $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ definta su un intervallo non ridotto ad un punto. Per ogni $x \in I$ sia $\mathrm{P}_x = (x, f(x))$ il corrispondente punto del grafico. Si dice "derivata" di f nel punto $x_0 \in \mathrm{I}$ e si indica con $f'(x_0)$ il limite, se esiste, della pendenza del segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ per x che tende a x_0 :

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} (\text{ pendenza di } \mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \end{aligned}$$

Non entriamo nel merito della defnizione di limite. Sottolineiamo solo che interessa la pendenza del segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}_x$ per valori di x arbitrariamente vicini a x_0 ma diversi da x_0 in quanto per $x = x_0$ il segmento si riduce a un punto e non ha alcuna definita pendenza.

Se la funzione f è derivabile nel punto x_0, allora si definsce la retta tangente al grafico di f nel punto P_{x_0} come la retta che passa per P_{x_0} ed ha pendenza $f'(x_0)$. Questa retta ha equazione cartesiana

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

(Interpretazione cinematica: si ha un punto materiale che in ciascun instante x nell'intervallo di tempo I sta su un corrispondente punto $f(x)$ sulla retta reale, la pendenza del segmento $\mathrm{P}_{x_0}\mathrm{P}$ è la velocità media del punto materiale nell'intervallo di tempo $[x_0, x]$ e la derivata $f'(x_0)$ è la velocità istantanea del punto materiale all'istante $x = x_0$.)

Di seguito mostriamo alcuni esempi di calcolo di derivate usando la definizione. Useremo le seguenti proprietà dei limiti:

(1) se due funzioni sono uguali in un intervallo contenente il punto x_0 tranne al più in x_0 (dove una o entrambe possono non essere definite), allora il limite per x che tende ad x_0 esiste per una funzione se e solo se esiste per l'altra e in tal caso sono uguali;
(2) l'operazione di limite è compatibile con le operazioni di somma e prodotto;
(3) il limite per x che tende ad x_0 della funzione x è x_0;
(4) il limite per x che tende ad x_0 di una funzione costante è la stessa costante.

Esempi.
(0) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1-1}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 0 = 0$$

(1) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$g'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} 1 = 1$$

(2) Sia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = x^2$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$h'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

(3) Sia $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = x^3$. Per ciascun $x_0 \in \mathbb{R}$ si ha

$$k'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2.$$

Si prova che

> Per ciascun numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$, la funzione potenza $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ è derivabile in ogni punto x_0 con derivata $f'(x_0) = nx_0^{n-1}$.

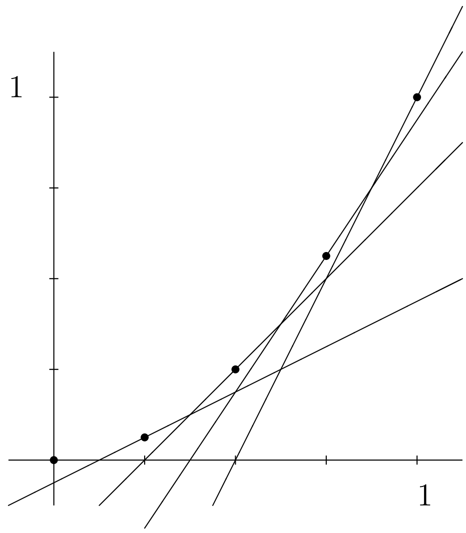
Applicazione. La funzione potenza quadrata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ha come grafico la parabola di equazione $y = x^2$; al punto $1/2$ sull'asse x corrisponde il punto $(1/2, 1/4)$ della parabola; la retta tangente alla parabola in questo punto ha pendenza $f'(1/2) = 2(1/2) = 1$, ed ha equazione

$$y - \frac{1}{4} = 1 \cdot (x - \frac{1}{2}), \quad \text{cioè} \quad y = x - \frac{1}{4}.$$

In generale: a ciascun punto x_0 sull'asse x corrisponde il punto (x_0, x_0^2) della parabola; la retta tangente alla parabola in questo punto ha pendenza $f'(x_0) = 2x_0$, ed ha equazione

$$y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0), \quad \text{cioè} \quad y = 2x_0 x - x_0^2.$$

Nella figura seguente riportiamo i punti della parabola corrispondenti ai punti 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1 sull'asse x e le rette tangenti in essi alla parabola.


1
1