Lezione del 04.12; principali punti in dettaglio.

D'ora in poi, se non specificato diversamente, considereremo funzioni definite su intervalli, non ridotti a un punto.

Funzione derivata. Si dice che una funzione

$$f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f(x)$$

è derivabile sul suo dominio I se e solo se f è derivabile in ogni punto x_0 di I; in tal caso si ha una funzione

$$f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto f'(x)$$

che si dice "funzione derivata" di f.

Spesso daremo una funzione da un dominio verso $\mathbb{R}$ dando un'espressione in una variabile e specificando che la variabile varia in quel dominio. Così, daremo una funzione con una scrittura del tipo

$$f(x), \quad (x \in \mathrm{I})$$

e, se la funzione è derivabile su I, indicheremo la funzione derivata con la scrittura

$$f'(x), \quad (x \in \mathrm{I});$$

talvolta risulta più naturale indicare la funzione derivata con la scrittura

$$\mathrm{D}(f(x)), \quad (x \in \mathrm{I}).$$

Esempio. Per ciascun numero naturale $n = 0, 1, 2, \ldots$ la funzione potenza $n-$ma

$$x^n, \quad (x \in \mathbb{R})$$

è derivabile, ed ha funzione derivata

$$\mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Operazioni sulle funzioni: somma e prodotto per scalari. Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Per ogni due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ si definisce la funzione somma $f + g : A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \ \text{ per ogni } x \in A.$$

Per ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$ ed ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si definisce la funzione $rf : A \to \mathbb{R}$ prodotto del numero reale per la funzione data ponendo

$$(rf)(x) = rf(x), \ \text{ per ogni } x \in A.$$

Si verifica che l'insieme $\mathcal{F}(A, \mathbb{R})$ delle funzioni da A verso $\mathbb{R}$, munito di queste operazioni, è uno spazio vettoriale. Dunque tutti i concetti definiti per uno spazio vettoriale qualsiasi si possono dare anche per questo spazio vettoriale, così si potrà parlare di combinazioni lineari di funzioni, di indipendenza lineare di funzioni, ...

Esempio. Le funzioni polinomiali di grado al più 2 sono tutte e sole le funzioni combinazioni lineari delle funzioni potenza di grado al più 2. Infatti, indicate le funzioni potenza di grado $0, 1, 2$ rispettivamente con p_0, p_1, p_2, per ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomiale di grado al più 2

$$f(x) = ax^2 + bx + x$$

si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= ap_2(x) + bp_1(x) + cp_0(x) \\ &= (ap_2)(x) + (bp_1)(x) + (cp_0)(x) \\ &= (ap_2 + bp_1 + cp_0)(x), \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè f è combinazione lineare

$$f = ap_2 + bp_1 + cp_0$$

delle funzioni potenza p_0, p_1, p_2, e vale il viceversa. Inoltre, le funzioni potenza p_2, p_1, p_0 sono linearmente indipendenti (per il principio di identità dei polinomi). In generale

> le funzioni polinomiali sono tutte e sole le funzioni combinazioni lineari di funzioni potenza; inoltre, ogni insieme finito di funzioni potenza è linearmente indipendente.

L'operazione di derivazione si comporta bene rispetto alle operazioni di somma di funzioni e di prodotto di numeri reali per funzioni, precisamente si ha la

Proposizione. Se $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili ed $r \in \mathbb{R}$, allora

(1) anche la funzione $f + g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile, e

$$(f + g)' = f' + g';$$

(2) anche la funzione $rf : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile, e

$$(rf)' = rf'.$$

Da questa proposizione segue direttamente che

> ogni funzione polinomiale f è derivabile, con derivata f' funzione polinomiale; se f ha grado $n > 0$ allora f' ha grado $n - 1$.

Esempio. Ogni funzione polinomiale di grado al più 2 è derivabile, e

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(ax^2 + bx + c) &= \mathrm{D}(ax^2) + \mathrm{D}(bx) + \mathrm{D}(c) \\ &= a\mathrm{D}(x^2) + b\mathrm{D}(x) + \mathrm{D}(c) \\ &= 2ax + b. \end{aligned}$$

Nozioni sull'andamento di una funzione.

Si dice che una funzione $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è

"crescente" su I se per ogni $x_1 < x_2$ in I si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$;

"strettamente crescente" su I se per ogni $x_1 < x_2$ in I si ha $f(x_1) < f(x_2)$;

analogamente per "decrescente" e "strettamenmte crescente".

Un punto $x_0 \in \mathrm{I}$ si dice

"punto di minimo assoluto" e per f se

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \text{ in I};$$

e "punto di minimo assoluto stretto" se la disuguaglianza vale col $<$, sotto la condizione $x \neq x_0$;

"punto di minimo relativo" per f se esiste un intervallo $]a, b[$ che contiene x_0 tale che

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \text{per ogni } x \text{ in }]a, b[\frown \mathrm{I};$$

e "punto di minimo relativo stretto" se la disuguaglianza vale col $<$, sotto la condizione $x \neq x_0$;

analogamente per "punto di massimo assoluto" ... "punto di massimo relativo stretto".

Esempio. Sia $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

$f(0) = 3$; f è strettamente decrescente su $[0, 1]$; $f(1) = 2$; f è strettamente crescente su $[1, 2]$; $f(2) = 4$; f è strettamente decrescente su $[2, 3]$; $f(3) = 1$;

allora

0 è un punto di massimo relativo, non assoluto, stretto per f;

1 è punto di minimo relativo, non assoluto, stretto per f;

2 è punto di massimo assoluto stretto per f;

3 è punto di minimo assoluto stretto per f.

Fatti.

(1) Una funzione polinomiale di primo grado

$$f(x) = mx + q, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

con m, q costanti e $m > 0$ è strettamente crescente; per $m < 0$ è strettamente decrescente.

(2) Una funzione polinomiale di secondo grado

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

con a, b, c costanti e $a > 0$ è strettamente decrescente fino a un punto x_0 nel quale ha un punto di minimo assoluto stretto ed è strettamente crescente da x_0 in poi; analogamente per $a < 0$ ...

(3) La funzione

$$f(x) = x^3, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

è strettamente crescente.

Uso delle derivate per lo studio dell'andamento di una funzione.

Ricordiamo le relazioni fra le proprietà di essere crescente o decrescente di una funzione derivabile e il segno della funzione derivata.

Sia f una funzione definita su un intervallo, derivabile. Se f è crescente, allora tutti i segmenti che hanno estremi sul grafico di f hanno pendenza non negativa, si prova che in ogni punto x_0 del domino di f si ha una derivata $f'(x_0) \geq 0$, così in ogni punto P_0 del grafico di f si ha una retta tangente con pendenza non negativa.

Riassumendo e completando, si ha il

Teorema. Sia f una funzione derivabile su un intervallo I. Allora
(1) se f è crescente su I, allora $f'(x) \geq 0$ per ogni x in I;
(1') se f è decrescente su I, allora $f'(x) \leq 0$ per ogni x in I.

Osservazione: se f è strettamente crescente su I, non è detto che $f'(x) > 0$ per ogni x in I; infatti, la funzione $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ è strettamente crescente sul suo dominio, $f'(x) = 3x^2$, e $f'(0) = 0$.

Vale anche il teorema inverso - che è un teorema più profondo. Ne enunciamo di seguito una variante, adeguata per studiare le funzioni che consideriamo.

Teorema. Sia f una funzione derivabile su un intervallo I. Allora
(1) se $f'(x) > 0$ per ogni x in I, allora f è strettamente crescente su I;
(1') se $f'(x) < 0$ per ogni x in I, allora f è strettamente decrescente su I.

Ricordiamo le relazione fra la proprietà di punto di essere un minimo relativo o massimo relativo per una funzione derivabile e l'annullarsi della derivata della funzione nel punto.

Sia f una funzione definita su un intervallo e derivabile in un punto x_0, non estremo. Se x_0 è un punto di minimo relativo per f e P_0 è il corrispondente punto del grafico di f, allora a ciascun punto x_1 con $x_1 < x_0$ abbastanza vicino ad x_0 corrisponde un punto P_1 del grafico di f tale che il segmento $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_0$ ha pendenza non negativa, e a ciascun punto x_2 con $x_0 < x_2$ abbastanza vicino ad x_0 corrisponde un punto P_2 del grafico di f tale che il segmento $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_2$ ha pendenza non positiva, si prova che in x_0 si ha una derivata $f'(x_0) = 0$, così nel punto P_0 del grafico di f si ha una retta tangente parallela all'asse x.

Riassumendo e completando, si ha il

Teorema. Sia f una funzione definita su un intervallo I derivabile in un punto x_0 in I, non estremo di I. Se x_0 è un punto di minimo relativo o massimo relativo per f, allora $f'(x_0) = 0$.

Osservazioni:
(1) L'enunciato ottenuto togliendo la condizione "x_0 non estremo di I" è falso; infatti, la funzione $f(x) = x^2$ considerata sull'intervallo $[-1, +\infty[$ ha in -1 un punto di massimo relativo, $f'(x) = 2x$, e $f'(-1) = -2$.
(2) L'enunciato inverso è falso; infatti, nel punto 0 la funzione $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$ ha derivata $f'(0) = 0$ ma 0 non è ne' un punto di minimo relativo ne' di massimo relativo per f.

Applicazione.

Esercizio. È data la funzione

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x - 9, \quad x \in [0, 3].$$

Si chiede di determinare gli intervalli sui quali f è crescente/decrescente, gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per f e di dare una rappresentazione del grafico di f.

$f(x)$ è derivabile su $\mathbb{R}$ con derivata

$$f'(x) = 12x^2 - 36x + 24 = 12(x^2 - 3x + 2);$$

questo trinomio ha radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$, dunque

$$f'(x) = 12(x - 1)(x - 2)$$

Sugli intervalli $[0, 1[,]1, 2[,]2, 3]$ f' è rispettivamente positiva, negativa, positiva.

Dunque:
Sugli intervalli $[0, 1[,]1, 2[,]2, 3]$ f è rispettivamente crescente, descrescente, crescente.

Da ciò segue che
0 è un punto di minimo relativo per f, con $f(0) = -9$ e $f'(0) = 24$;
1 è un punto di massimo relativo per f, con $f(1) = 1$ e $f'(1) = 0$;
2 è un punto di minimo relativo per f, con $f(2) = -1$ e $f'(2) = 0$;
3 è un punto di massimo relativo per f, con $f(3) = 9$ e $f'(3) = 24$.

Si lascia al lettore e di dare una rappresentazione del grafico di f secondo le informazioni acquisite.