Lezione del 05.12; principali punti in dettaglio.

Continuità e derivabilità.

Non tutte le funzioni sono continue. Un esempio: la funzione

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(Questa funzione non soddisfa la definizione informale di continuità data; osserviamo che non soddisfa nemmeno il teorema dei valori intermedi: $f(-2) = -1$, $f(2) = 1$, $-1 < 0 < 1$, ma non esiste alcun x^* con $-2 < x^* < 2$ tale che $f(x^*) = 0$).

Non tutte le funzioni continue sono derivabili. Un esempio: la funzione valore assoluto

$$|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}.$$

(Informalmente: il grafico di questa funzione è l'unione della semiretta $y = x$ ($x \geq 0$) e della semiretta $y = -x$ ($x \leq 0$), l'origine $(0, 0)$ è un punto del grafico, e in quento punto non c'è alcuna retta che possa essere considerata tangente al grafico. Ciò corrisponde al fatto che la funzione non è derivabile nel punto 0 del suo dominio.)

Proposizione. Se una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile su un intervallo I, allora f è continua su I.

Funzioni razionali.

Consideriamo la funzione che ad ogni numero reale non nullo asssocia il suo inverso moltiplicativo

$$(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}; \quad \text{in breve: } \frac{1}{x},\ (x \neq 0).$$

L'andamento di questa funzione, ben noto, si può descrivere un po' informalmente come segue. (1) Per x positivo $1/x$ assume valori positivi: valori positivi quanto si voglia piccoli per x positivo abbastanza grande ($1/x$ ha limite 0^+ per x che tende a $+\infty$), valori positivi quanto si voglia grandi per x positivo abbastanza piccolo ($1/x$ ha limite $+\infty$ per x che tende a 0^+). (2) Per x negativo $1/x$ assume valori negativi: valori negativi quanto si voglia piccoli in valore assoluto per x negativo abbastanza grande in valore assoluto ($1/x$ ha limite 0^- per x che tende a $-\infty$), valori negativi quanto si voglia grandi in vaolre assolutio per x negativo abbastanza piccolo in valotre assoluto ($1/x$ ha limite $-\infty$ per x che tende a 0^-). (3) La funzione $1/x$ è strettamente decrescente su ciascuno degli intervalli $]-\infty, 0[$ e $]0, +\infty[$ (ma non è decrescente sull'intero dominio $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) =]-\infty, 0[\smile]0, +\infty[$).

Per ogni $x_0 \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x_0 - x}{x x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} -\frac{1}{x x_0} = -\frac{1}{x_0^2}; \end{aligned}$$

dunque la funzione $1/x$ $(x \neq 0)$ è derivabile sul suo dominio, e

$$\mathrm{D}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}, \quad (x \neq 0).$$

Usando un'altra notazione per l'inverso moltiplicativo, si ha: la funzione x^{-1} $(x \neq 0)$ è derivabile sul suo dominio, con funzione derivata data da

$$\mathrm{D}\left(x^{-1}\right) = -x^{-2}, \quad (x \neq 0).$$

Ricodiamo che la potenza x^n di un numero reale x con esponente intero relativo n $(x \neq 0$ per $n \leq 0)$ si definisce ponendo

$$x^n = \begin{cases} \text{prodotto di } n \text{ fattori uguali ad } x & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0\ . \\ \text{prodotto di } |n| \text{ fattori uguali ad } x^{-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Si prova che per ogni n intero relativo fissato la funzione x^n $(x \neq 0$ se $n \leq 0)$ è derivabile sul suo dominio, con funzione derivata

$$\mathrm{D}\left(x^n\right) = nx^{n-1} \quad (x \neq 0 \text{ se } n \leq 0).$$

Un'espressione del tipo

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

dove $p(x)$ e $q(x)$ sono due polinomi, con $q(x)$ non identicamente nullo, definisce una funzione con dominio $\{x \in \mathbb{R} : \ q(x) \neq 0\}$; indicato con m il grado di $q(x)$ questo dominio è dunque tutto $\mathbb{R}$ esclusi al più m punti. Una funzione di questo tipo si dice "funzione razionale".

Operazioni sulle funzioni: prodotto e moltiplicazione. Sia dato un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$.

Per ogni due funzioni $f, g : A \to \mathbb{R}$ si definisce la funzione prodotto $fg : A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad \text{per ogni } x \in A;$$

sotto la condizione $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$, si definisce la funzione quoziente $\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Il comportamento della derivazione rispetto alle operazioni di prodotto e divisione di funzioni è dato dalla seguente

Proposizione. Per ogni $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ funzioni derivabili su un intervallo I si ha:
(1) anche la funzione $fg : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile su I, inoltre

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

(2) sotto la condizione $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathrm{I}$, anche la funzione $f/g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ è derivabile su I, inoltre

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

(La regola di derivazione dei quozienti segue dalla regola di derivazione dei prodotti. Infatti, dall'identità

$$g\left(\frac{f}{g}\right) = f,$$

derivando entrambe i membri, per la regola di derivazione dei prodotti si ha

$$g'\left(\frac{f}{g}\right) + g\left(\frac{f}{g}\right)' = f', \quad g'f + g^2\left(\frac{f}{g}\right)' = f'g$$

esplicitando $\left(\frac{f}{g}\right)'$, si ottiene la regola di derivazione dei quozienti.)

Poiché ciascuna funzione polinomiale è derivabile su $\mathbb{R}$, con funzione derivata ancora polinimiale, da questa proposizione si ha:

> ciascuna funzione razionale è derivabile sul suo dominio di definizione, con funzione derivata ancora razionale.

Applicazione.

Esercizio. È data la funzione

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-5}, \quad x \neq \pm\sqrt{5}.$$

Si chiede di determinare gli intervalli sui quali f è crescente/decrescente e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per f.

La funzione $f(x)$ è derivabile sul suo dominio, con funzione derivata

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x-3)'(x^2-5) - (x-3)(x^2-5)'}{(x^2-5)^2} \\ &= \frac{x^2-5-(x-3)2x}{(x^2-5)^2} \\ &= \frac{-x^2+6x-5}{(x^2-5)^2}, \quad x \neq \pm\sqrt{5}; \end{aligned}$$

il numeratore ha radici $x_1 = 1$ e $x_2 = 5$, dunque

$$f'(x) = \frac{-(x-1)(x-5)}{(x^2-5)^2}, \quad x \neq \pm\sqrt{5}.$$

Si ha

$$\frac{-(x-1)(x-5)}{(x^2-5)^2} \gtreqless 0 \quad \text{se e solo se} \quad -(x-1)(x-5) \gtreqless 0, \qquad x \neq \pm\sqrt{5}.$$

Sugli intervalli

$$]-\infty, -\sqrt{5}[,\ ]-\sqrt{5}, 1[,\ ]1, \sqrt{5}[,\ ]\sqrt{5}, 5[,\ ]5, +\infty[,$$

la funzione derivata f' è rispettivamente negativa, negativa, positiva, positiva, negativa, dunque su tali intervalli la funzione f è rispettivamente descrescente, decrescente, crescente, crescente, decrescente, sempre strettamente.

Da ciò segue che
1 è un punto di minimo relativo per f, con $f(1) = 0,5$;
5 è un punto di massimo relativo per f, con $f(5) = 0,1$;
non ci sono punti di minimo o massimo relativo al di fuori di questi.

Funzioni esponenziali.

Consideriamo per ogni intero relativo n la corrispondente potenza di 2:

$$\begin{array}{cccccccccc} n & \dots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \\ 2^n & \dots & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & \dots \end{array}$$

si ha coasì una funzione $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dall'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi verso $\mathbb{R}$. Si prova che questa funzione si può estendere in uno ed un solo modo ad una funzione continua 2^x $(x \in \mathbb{R})$ tale che

$$2^{x_1+x_2} = 2^{x_1}2^{x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R},$$

e che questa funzione risulta essere derivabile su $\mathbb{R}$.

La funzione 2^x $(x \in \mathbb{R})$ si dice "funzione esponenziale di base 2".

Per ogni x la funzione 2^x assume valori positivi: valori positivi quanto si voglia grandi per x positivo abbastanza grande (2^x ha limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$) e valori positivi quanto si voglia piccoli per x negativo abbastanza grande in valore assoluto (2^x ha limite 0^+ per x che tende a $-\infty$). La funzione 2^x è strettamente crescente su $\mathbb{R}$.

La funzione esponenziale di base il "numero di Nepero" $\mathrm{e} = 2,718\dots$ è definta in modo analogo, ha lo stesso andamento, ed è caratterizzata dalla seguente proprietà

Teorema. La funzione esponenziale e^x $(x \in \mathbb{R})$ è derivabile sul suo dominio e coincide con la sua funzione derivata

$$\mathrm{D}\,(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Viceversa, se $f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ è una funzione derivabile su $\mathbb{R}$ che coincide con la propria derivata e che in 0 vale 1

$$\mathrm{D}f(x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad f(0) = 1,$$

allora $f(x)$ è la funzione esponenziale naturale, $f(x) = \mathrm{e}^x$ $(x \in \mathbb{R}.)$

Esercizio. È data la funzione

$$x\mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si chiede di determinare gli intervalli sui quali f è crescente/decrescente e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per f.

La funzione è derivabile sul suo dominio, con funzione derivata

$$(x\mathrm{e}^x)' = (x)'\mathrm{e}^x + x(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si ha
$$(1+x)\mathrm{e}^x \gtreqless 0 \quad \text{se e solo se} \quad 1+x \gtreqless 0 \qquad x\in\mathbb{R}$$
Sugli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$ la funzione derivata è rispettivamente negativa e positiva, dunque su tali intervalli la funzione è rispettivamente strettamente descrescente e crescente. Da ciò segue che -1 è un punto di minimo relativo per la funzione, sul quale la funzine vale $-e^{-1}$ e non ci son altri punti di minimo o massimo relativo.

Notazione.

Di seguito ci sarà utile usare la seguente notazione: indicata una funzione con $f(x)$ $(x\in I)$ indicheremo la funzione derivata di f con
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x) \quad (x\in I).$$

Derivazione e composizione di funzioni.

Proposizione. Siano date due funzioni $f(x)$ $(x\in I)$ e $g(x)$ $(x\in J)$ tali che $f(x)\in J$ per ogni $x\in I$, in modo che sia definita la funzione composta $g(f(x))$ $(x\in I)$. Se $f(x)$ è derivabile su I e $g(x)$ è derivabile su J allora $g(f(x))$ è derivabile su I e
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}g(f(x)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}g(y)\right)_{y=f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}f(x).$$

Esempi.

(1) La funzione $(2x+3)^7$ $(x\in\mathbb{R})$ è derivabile sul suo dominio in quanto è la funzione composta della funzione x^7 $(x\in\mathbb{R})$ dopo la funzione $2x+3$ $(x\in\mathbb{R})$ che sono derivabili sul loro dominio, inoltre
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(2x+3)^7 \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\,y^7\right)_{y=2x+3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,(2x+3) = \left(7y^6\right)_{y=2x+3}(2) = 14(2x+3)^6.$$

(2) Per ogni funzione $f(x)$ $(x\in I)$ derivabile sul suo dominio e intero relativo n, la funzione $[f(x)]^n$ $(x\in I$ tale che $f(x)\neq 0$ se $n\leq 0)$ è derivabile sul suo dominio, inoltre
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,[f(x)]^n \;= n[f(x)]^{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,f(x).$$

(3) La funzione e^{-x^2} $(x\in\mathbb{R})$ è derivabile sul suo dominio in quanto è la funzione composta della funzione e^x $(x\in\mathbb{R})$ dopo la funzione $-x^2$ $(x\in\mathbb{R})$ che sono derivabili sul loro dominio, inoltre
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,\mathrm{e}^{-x^2} \;=\; \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dy}}\,\mathrm{e}^y\right)_{y=-x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}(-x^2) = (\mathrm{e}^y)_{y=-x^2}(-2x) = -2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

(4) Per ogni funzione $f(x)$ $(x\in I)$ derivabile sul suo dominio, la funzione $\mathrm{e}^{f(x)}$ $(x\in I)$ è derivabile sul suo dominio, inoltre
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,\mathrm{e}^{f(x)} \;= \mathrm{e}^{f(x)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\,f(x).$$