Un primo gruppo di esercizi indicativo dei livelli di complessità della prova scritta.

1. Sia $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ una base dello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^3$. Si verifichi che i vettori $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{i}-\mathbf{k}$ formano una base di $\mathcal{V}_o^3$ e si determinino le coordinate del vettore $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ rispetto ad essa.

2. Nello spazio euclideo $\mathcal{E}^3$, identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico. Sono date le rette

   r passante per il punto $(1,0,0)$ ed avente vettore direttore $(0,1,1)$;
   s passante per il punto $(0,0,1)$ ed avente vettore direttore $(2,1,0)$.

   (a) Si verifichi che r ed s sono sghembe. (b) Si determini la distanza fra r ed s in due modi: tramite la determinazione di un segmento con estremi sulle due rette ortogonale alle due rette e tramite la determinazione di un piano contenente una retta e parallelo all'altra retta.

3. Sono date le applicazioni

   $\mathrm{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{F}(x,y,z) = (x+y, x+z)$;
   $\mathrm{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{G}(x,y) = (x+2y, x+3y)$;

   (1) Si calcoli se possibile l'applicazione composta $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$; lo si faccia in due modi: usando solo la definizione di funzione composta e usando la moltiplicazione di matrici. (2) Analogamente per $\mathrm{F} \circ \mathrm{G}$.

4. È data l'applicazione

   $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\mathrm{L}(x,y) = (x+y, 2x+4y)$;

   Si determini se possibile l'applicazione inversa L^{-1}; lo si faccia in due modi: usando solo la definizione di applicazione inversa e usando l'inversione di matrici.

5. Sia $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$ una base di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathrm{L} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare tale che

   $$\mathrm{L}(\bar{\mathbf{e}}_1) = \bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2, \quad \mathrm{L}(\bar{\mathbf{e}}_2) = 3\,\bar{\mathbf{e}}_1 + \bar{\mathbf{e}}_2.$$

   (a) Si determini l'applicazione lineare $\overline{\mathrm{L}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ che rappresenta L rispetto alla base $\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2$. (b) Posto $\bar{\mathbf{e}}_1 = (1,1)$, $\bar{\mathbf{e}}_2 = (-1,1)$ si determini l'applicazione L. (c) Si effettui una verifica usando il determinante.

6. Nello spazio vettoriale $\mathcal{V}_o^2$, identificato con $\mathbb{R}^3$ mediante una base ortonormale destrorsa $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Si calcoli la composizione di rotazioni

   $$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2};\mathbf{k}} \circ \mathrm{R}_{\pi;\mathbf{j}};$$

   lo si faccia in due modi: tramite il calcolo diretto dell'immagine dei vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ e tramite il calcolo di un prodotto di matrici.

7. Nel piano euclideo $\mathcal{E}^2$, identificato con $\mathbb{R}^2$ mediante un sistema di rfiferimento cartesiano ortogonale monometrico. (a) Si determini l'applicazione $\mathrm{R}_r : \mathcal{E}^2 \to \mathcal{E}^2$ di riflessione ortogonale rispetto alla retta r di equazione $2x+2y+3=0$. (b) Si fattorizzi R_r come composizione di una traslazione e di un'applicazione lineare. (c) Si effettuino due verifiche, una usando il determinante ed una calcolando immagini di punti.

8. E data la funzione

$$f(x) = e^{\frac{x}{2-x^2}}, \quad x \in [-1, 1]$$

Si calcoli la funzione derivata, si determinino gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per f, e si rappresenti la retta tangente al grafico di f nel punto del grafico di ascissa $x = 0$.