Lezione del 0403; Registro dettagliato

Si e' dato il "principio del pastore": se esiste una funzione suriettiva k a 1 da un insieme A ad un insieme B allora

$$|B| = \frac{|A|}{k}.$$

Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$, si e' definito "coefficiente binomiale n su k" ed indicato con $\binom{n}{k}$ il numero dei $k-$sottinsiemi di un $n-$insieme.
Si e' sottolineato che la definizione e' ben posta. Si sono osservati i valori ovvi dei coefficienti binomiali.
Si e' ricavata la formula ricorsiva

$$\begin{cases} \binom{n}{0} = 1; \ \binom{0}{k} = \delta_{0k} & (n, k \in \mathbb{N}) \\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & (n, k \in \mathbb{N}^+) \end{cases}$$

Si e' ricavata la formula esplicita

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{(n)_k}{k!}, \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

(con opportune convenzioni per n e/o k nulli). [1]
Si e' ricavata la formula esplicita

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (n, k \in \mathbb{N})$$

[1]Dim. Posso costruire i $k-$sottinsiemi di un $n-$insieme A nel modo seguente: per ogni funzione iniettiva $f : \mathbb{N}_k \to A$, considero $f(\mathbb{N}_k)$. Osservo che:

(1) il numero delle funzioni iniettive $f : \mathbb{N}_k \to A$ e' $(n)_k$;

(2) per ciascun $k-$sottinsieme B di A, le funzioni iniettive $f : \mathbb{N}_k \to A$ tali che $f(\mathbb{N}_k) = B$ si possono identificare con le funzioni biiettive $f : \mathbb{N}_k \to B$, dunque sono in numero di $k!$.

Per il principio del pastore, concludo che

$$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

(con opportune convenzioni per n e/o k nulli). Questa formula puo' essere ottenuta direttamente dalla precedente; si e' data anche l'idea per una sua dimostrazione indipendente. [2]

Si e' enunciato che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ i seguenti insiemi sono equipotenti:

l'insieme dei $k-$sottinsiemi di un dato $n-$insieme;

l'insieme delle parole strettamente crescenti di lunghezza k su un dato alfabeto di n lettere;

l'insieme delle parole di lunghezza n in due date lettere, con molteplicita' $(k, n-k)$.

Dunque i coefficienti binomiali si possono equivalentemente definire e le loro proprieta' si possono equivalentemente stabilire nei termini di sottinsiemi o di parole crescenti o di parole con due lettere.

Si e' enunciato il teorema binomiale. Th.: nell'anello $\mathbb{Z}[x, y]$ si ha

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Si e' enunciato che questa identita' si dimostra direttamente usando solo il/un significato dei coefficienti binomiali, si e' data l'idea per una dimostrazione nei termini di parole crescenti e per una nei termini di parole in due lettere.

Si e' accennato alla generalizzazione per n reale o complesso.

[2]Dim. Posso costruire i $k-$sottinsiemi di un $n-$insieme A nel modo seguente: scelto un $k-$sottinsieme B_0 di A, per ogni funzione biiettiva $f : A \to A$, considero $f(B_0)$. ...