Lezione del 7 marzo; Registro dettagliato

Descrizione di una presentazione fine dell'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi, da un testo per una media superiore. Motivazioni (dalla descrizione del tempo, delle altezze, delle temperature, dei bilanci crediti-debiti); cenni storici (emergere del concetto, prima descrizione completa, formalizzazione moderna). Insieme dei numeri interi relativi come unione $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ di due copie $\mathbb{Z}^+ = \{0, +1, +2, \ldots\}$ e $\mathbb{Z}^- = \{0, -1, -2, \ldots\}$ dell'insieme dei numeri naturali (i simboli + e - sono puri marcatori) aventi in comune il solo zero, $\mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$; funzione valore assoluto, funzione segno. Descrizione di $\mathbb{Z}$ come sottinsieme dei punti di una retta con un riferimento fissato, descrizione come spostamenti rispetto all'origine, corrispondente significato del valore assoluto e del segno. Definizione per casi dell'operazione di addizione, a seconda dei segni e dei valori assoluti. Elemento neutro, la funzione opposto. Enunciazione delle proprieta' dell'addizione, con particolare riferimento alle equazioni. Scrittura semplificata delle espressioni. Osservazione che $\mathbb{Z}^+$ e' identificabile con $\mathbb{N}$ come insieme e come struttura additiva; conseguente identificazione anche come struttura moltiplicativa. Enunciazione del fatto che esiste uno ed un solo modo di estendere la struttura moltiplicativa da $\mathbb{Z}^+$ a $\mathbb{Z}$; definizione dell'operazione di moltiplicazione per casi (regola dei segni). Enunciazione delle proprieta' dell'addizione, e della proprieta' distributiva.

Descrizione di una presentazione formale dell'anello $\mathbb{Z}$ dei numeri interi relativi; primo passo: costruzione del gruppo additivo $\mathbb{Z}$ a partire dal monoide additivo $\mathbb{N}$ (caso particolare della costruzione per simmetrizzazione di un gruppo abeliano a partire da un monoide abeliano regolare, cfr. EAV1415, Schede Integrative, Cap. 1, Par. 1.2). Si e' mostrato come tale costruzione e' suggerita, quasi dettata, dalla descrizione del problema posto dalla non generale risolubilita' nel monoide $(\mathbb{N}, +, 0)$ di equazioni $a + x = b$ (a, b parametri e x incognita in $\mathbb{N}$). Descrizione del problema: costruire un monoide abeliano regolare $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}; +, 0)$, che contenga un sottomonoide $\mathbb{N}'$ isomorfo a $(\mathbb{N}, +, 0)$, nel quale ciascuna equazione $a + x = b$ (a, b parametri in $\mathbb{N}'$ e x incognita in $\mathbb{Z}$) abbia una (ed una sola) soluzione, e costruire tale monoide $\mathbb{Z}$ in modo che sia il piu' piccolo possibile (nel senso che nessun sottomonoide proprio di $\mathbb{Z}$ contente $\mathbb{N}'$ abbia la proprieta' richiesta). Supposto che un tale $\mathbb{Z}$ esista, si ha una funzione $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ che ad ogni $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ associa l'unica soluzione in $\mathbb{Z}$ dell'equazione $a + x = b$ (leggero abuso di notazione, dall'identificazione di N con $\mathbb{N}'$); in altri termini, d e' la funzione "differenza"

$d(a,b) = b + (-a) = b - a$ ($-a$ opposto di a in $\mathbb{Z}$). Si osserva che: (1) la funzione d e' un omomorfismo dal monoide $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ somma diretta del monoide $\mathbb{N}$ con se' stesso al monoide $\mathbb{Z}$; (2) l'immagine di d in $\mathbb{Z}$ e' un sottomonoide di $\mathbb{Z}$, che contiene un sottomonoide $\mathbb{N}'$ isomorfo ad $\mathbb{N}$, nel quale tutte le equazioni in questione hanno soluzione; (3) la congruenza su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ indotta da d e' data da $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$ se e solo se $a_1 + b_2 = a_2 + b_1$. Cio' suggerisce di prendere $\mathbb{Z}$ come il monoide quoziente

$$\mathbb{Z} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/ \sim .$$

Si e' affermato che questa costruzione fornisce una soluzione del problema, e che $\mathbb{Z}$ risulta essere un gruppo abeliano. Non si sono provate queste affermazioni.

Si e' affermato che la costruzione data del gruppo abeliano $(\mathbb{Z}; +, 0, -)$ a partire dal monoide abeliano regolare $(\mathbb{N}; +, 0)$ si puo' completare ad una costruzione dell'anello $(\mathbb{Z}; +, 0, -; \cdot, 1)$ a partire dal semianello $(\mathbb{N}; +, 0; \cdot, 1)$.