Risoluzione di alcuni esercizi

III sett., es. 1 Esistono due anelli diversi $T = \{\mathbb{Z}; +, 0, -; \top, t\}$ e $U = \{\mathbb{Z}; +, 0, -; \perp, u\}$ che abbiano lo stesso insieme sostegno $\mathbb{Z}$ e la stessa struttura additiva $\{\mathbb{Z}; +, 0, -\}$ del gruppo degli interi relativi?

Svolgimento. Si. In realta', per ogni anello commutativo $A = \{A; +, 0, -; \cdot, 1\}$ si ha un altro anello commutativo $B = \{A; +, 0, -; *, 1_*\}$ con lo stesso insieme sostegno e la stessa struttura additiva di A, ponendo $a * b = -(ab)$ per ogni $a, b \in A$ e $1_* = -1$. Infatti:

- vale la proprieta' distributiva del prodotto $*$ rispetto all'addizione: $a * (b + c) = -a(b + c) = -(ab + ac) = -ab - ac = a * b + a * c$;

- il prodotto $*$ e' chiaramente commutativo, ed e' associativo: $a*(b*c) = -a(-bc) = abc$ e $(a * b) * c = -(-ab)c = abc$;

-l'elemento $1_* = -1$ e' l'elemento neutro per il prodotto $*$: $1_* * a = (-1) * a = -(-1a) = a$.

Commenti.

In realta' il fatto e' che la funzione $a \mapsto -a$ e' un automorfismo del gruppo additivo di A, e la seconda struttura moltiplicativa sull'anello A si ottiene trasportando il prodotto di A tramite questa funzione; da un altro punto di vista, la funzione $s : a \mapsto -a$ e' un isomorfismo fra A e B (infatti lo e' per la struttura additiva, e lo e' per la struttura moltiplicativa, in quanto $s(a) * s(b) = -(s(a)s(b)) = -((-a)(-b)) = -(ab) = s(ab)$, inoltre $s(1) = -1 = 1_*$.)

Nel caso dell'anello degli interi relativi, si hanno esattamente due strutture moltiplicative coerenti con la stessa struttura additiva. Infatti, indicati con $*$ e 1_* un quasliasi prodotto e relativo elemento unita' compatibili con la struttura additiva di $\mathbb{Z}$, e posto

$$1 * 1 = m, \quad 1_* = h,$$

si ha, indicando con $\cdot$ l'operazione "multiplo additivo secondo un intero relativo",

$$1 = 1 * 1_* = 1 * h = 1 * (h \cdot 1) = h \cdot (1 * 1) = h \cdot m = hm,$$

dunque $hm = 1$ e cio' e' possibile solo per $h = m = 1$ oppure per $h = m = -1$.

IV sett., es. 4 Si provi direttamente, senza fare riferimento al completamento di $\mathbb{Q}$ ad $\mathbb{R}$, che nel campo ordinato $\mathbb{Q}$ il sottinsieme limitato $\{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 \leq 2\}$ non ha estremo superiore.

(Nella definizione dell'insieme si puo' sostituire il $\leq$ col $<$ in quanto in $\mathbb{Q}$ l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni.)

Prima dimostrazione. Pongo $X = \{x \in \mathbb{Q} : \ x^2 < 2\}$ e $Y = \{y \in \mathbb{Q}^+ : \ y^2 > 2\}$.

Affermo che X non ha massimo e che Y non ha minimo. Infatti:

(1) per ogni $x \in X$ esiste un $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $x' = (x + \frac{1}{n}) \in X$; infatti, $x \in X$ significa $x^2 < 2$ e $x' \in X$ significa $(x + \frac{1}{n})^2 < 2$, cioe'

$$(2 - x^2)n^2 - 2nx - 1 > 0;$$

essendo $2 - x^2 > 0$, questa disuguaglianza e' soddisfatta per n abbastanza grande. [1]

(2) per ogni $y \in Y$ esiste un $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $y' = (y - \frac{1}{n}) \in Y$; infatti, $y \in Y$ significa $y^2 > 2$, e $y' \in Y$ significa $(y - \frac{1}{n})^2 > 2$, cioe'

$$(y^2 - 2)n^2 - 2ny + 1 > 0;$$

essendo $y^2 - 2 > 0$, questa disuguaglianza e' soddisfatta per n abbastanza grande. [2]

Affermo che Y e' l'insieme dei maggioranti di X. Infatti:

- da una parte, per ogni $z \in Q^+$ maggiorante di X si ha $z \in Y$; altrimenti si avrebbe $z^2 < 2$ cioe' $z \in X$, e per la (1) esisterebbe un $z' \in X$ con $z < z'$, assurdo.

- dall'altra parte, per ogni $y \in Y$ si ha che y e' un maggiorante di X; altrimenti esisterebbe un $x \in X$ con $x > y$ e si avrebbe $2 > x^2 > y^2$, assurdo.

Infine, per la (2) si ha che l'insieme Y dei maggioranti di X non ha minimo, cioe' X non ha estremo superiore.

Seconda dimostrazione. Suppongo per assurdo che esista $\mathrm{Sup}(X) = \xi \in \mathbb{Q}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ sia $F_n = \{\frac{i}{n} | \ i \in \mathbb{N}^+\}$, e siano $f_n = \mathrm{Max}\{x \in F_n : \ x^2 < 2\}$ e $g_n = \mathrm{Min}\{x \in F_n : \ x^2 > 2\}$; si ha $g_n - f_n = \frac{1}{n}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, si ha che $f_n \in X$ e g_n e' un maggiorante di X (altrimenti $g_n < x$ per qualche $x \in X$ e si avrebbe $2 < g_n^2 < x^2 < 2$), e dunque $f_n \leq \xi \leq g_n$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ si ha che $f_n^2 \leq 2 \leq g_n^2$; e anche $f_n^2 \leq \xi^2 \leq g_n^2$; inoltre $f_n^2 - g_n^2 = (f_n - g_n)(f_n + g_n) \leq \frac{3}{n}$.

Dunque deve essere $\xi^2 = 2$, ma $\xi \in \mathbb{Q}$ e cio' e' impossibile.

[1] la disuguaglianza e' implicata dalla $(2 - x^2)n^2 - 2nx - n > 0$, cioe' dalla $(2 - x^2)n - 2x - 1 > 0$, che a sua volta equivale alla $n > (2x + 1)/(2 - x^2)$.

[2] la disuguaglianza e' implicata dalla $(y^2 - 2)n^2 - 2ny > 0$, cioe' dalla $(y^2 - 2)n - 2y > 0$, che a sua volta equivale alla $n > (2y)/(y^2 - 2)$.