Lezione del 04 aprile. Registro dettagliato

Numeri reali

Il riferimento principale di questa lezione e' EAV14, Cap 3, Par. 3.6 Dai numeri razionali ai numeri reali, pp. 84-88 tranne "una costruzione molto elegante ..." Di seguito si riportano alcune sottolineature e un approfondimento sulla parte trattata nelle pp. 87-88 sull'esistenza e unicita' del campo reale.

Campi ordinati

- Ci sono due definizioni equivalenti di campo ordinato:

Un campo ordinato e' una coppia $(\mathbb{K};\leq)$ costituita da un campo $\mathbb{K}=(\mathbb{K};+,0;\cdot,1)$ e da una relazione d'ordine totale $\leq$ su $\mathbb{K}$ compatibile con le operazioni $+,\cdot$ di $\mathbb{K}$, nel senso che per ogni $a,b,c\in\mathbb{K}$, da $a\leq b$ segue $a+c\leq b+c$, e da $a\leq b$ e $c\geq 0$ segue $ac\leq bc$. Un omomorfismo fra i campi ordinati $(\mathbb{K}_1;\leq)$ e $(\mathbb{K}_2;\leq)$ e' un omomorfismo di campi $f:\mathbb{K}_1\rightarrow\mathbb{K}_2$ tale che per ogni $x,y\in\mathbb{K}_1$ da $x\leq y$ segue $f(x)\leq f(y)$.

Un campo ordinato e' una coppia $(\mathbb{K};\mathbb{K}^+)$ costituita da un campo $\mathbb{K}=(\mathbb{K};+,0;\cdot,1)$ e da un sottinsieme $\mathbb{K}^+\subset\mathbb{K}$ chiuso rispetto alle operazioni $+,\cdot$ tale che posto $\mathbb{K}^-=-\mathbb{K}^+$ si abbia $\mathbb{K}=\mathbb{K}^+\cup\mathbb{K}^-$ e $\mathbb{K}^+\cap\mathbb{K}^-=\{0\}$. Un omomorfismo fra i campi ordinati $(\mathbb{K}_1;\mathbb{K}_1^+)$ e $(\mathbb{K}_2;\mathbb{K}_2^+)$ e' un omomorfismo di campi $f:\mathbb{K}_1\rightarrow\mathbb{K}_2$ tale che per $f(\mathbb{K}_1^+)\subseteq\mathbb{K}_2^+$.

- Le due definizioni sono equivalenti nel senso seguente. Se $(\mathbb{K},\leq)$ e' una coppia soddisfacente la prima definizione, allora, posto $\mathbb{K}^+=\{x\in\mathbb{K}:\ x\geq 0\}$, si ha che $(\mathbb{K};\mathbb{K}^+)$ e' una coppia soddisfacente la seconda definizione. Se $(\mathbb{K};\mathbb{K}^+)$ e' una coppia soddisfacente la seconda definizione, allora, posto $x\leq y$ sse $y-x\in\mathbb{K}^+$, si ha che $(\mathbb{K},\leq)$ e' una coppia soddisfacente la prima definizione. Un omomorfismo di campi e' un omomorfismo di campi ordinati nel senso della prima definizione se e solo se e' un omomorfismo di campi ordinati nel senso della seconda definizione.

- Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato. Allora, $\mathbb{K}$ ha caratteristica zero, e si ha un'immersione canonica $\mathbb{Q}\rightarrow\mathbb{R}$ di campi ordinati; l'immagine di questo omomorfismo e' il campo minimo $\mathbb{K}_0$ di $\mathbb{K}$.

Campi ordinati completi, continui, archimedei

- Un campo ordinato $\mathbb{K}$ si dice

– completo se e solo se ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato di $\mathbb{K}$ ha estremo superiore in $\mathbb{K}$, o, equivalentemente, ogni sottinsieme non vuoto e inferiormente limitato di $\mathbb{K}$ ha estremo inferiore in $\mathbb{K}$;

– continuo se e solo se ogni coppia (A,B) di sottinsiemi di $\mathbb{K}$ non vuoti e separati ($a\leq b$ per ogni $a\in A$, $b\in B$) ha in $\mathbb{K}$ almeno un elemento separatore (un $c\in\mathbb{K}$ tale che $a\leq c\leq b$ per ogni $a\in A$, $b\in B$).

– archimedeo se e solo se per ogni $a, b \in \mathbb{K}$ con $0 < a < b$, esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \cdot a > b$.

- Un campo ordinato e' completo se e solo se e' continuo. (Se $\mathbb{K}$ e' completo, allora per ogni coppia A, B di sottinsiemi non vuoti separati di $\mathbb{K}$ si ha che A ha estremo superiore e questo e' un elemento separatore fra A e B. Se $\mathbb{K}$ e' continuo, allora per ogni sottinsieme non vuoto e superiormente limitato C di $\mathbb{K}$ si ha che C e l'insieme D dei suoi maggioranti hanno almeno un elemento separatore, e questo e' l'estremo superiore di A.)

- Teorema: Un campo ordinato completo e' archimedeo. (Per la dimostrazione cfr EAV14 par. cit., p. 87)

- Teorema: Sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato completo. Allora

– $\forall b \in \mathbb{K}$ con $0 < b$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n > b$,

– $\forall a \in \mathbb{K}$ con $0 < a$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{1}{n} < a$;

– $\forall a, b \in \mathbb{K}$ con $a < b$, $\exists x \in \mathbb{Q}$ tale che $a < x < b$.

(Qui si sono identificati il sottoanello e il sottocampo minimi di $\mathbb{K}$ con $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$; ciascuna delle prime due affermazioni e' direttamente equivalente alla proprieta' archimedea; la dimostrazione della terza e' data per esercizio).

- Teorema: sia $\mathbb{K}$ un campo ordinato completo; allora ogni elemento di $\mathbb{K}$ e' univocamente determinato dai suoi minoranti stretti in $\mathbb{K}_0$ e le operazioni in $\mathbb{K}$ sono univocamente determinate dalle operazioni in $\mathbb{K}_0$; specificamente:

$$\begin{aligned} a &= \sup\{x;\ x \in \mathbb{K}_0,\ x < a\}, \qquad \forall a \in \mathbb{K}. \\ a + b &= \sup\{x + y;\ x, y \in \mathbb{K}_0 :\ x < a,\ y < b\}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{K}; \\ ab &= \sup\{xy;\ x, y \in \mathbb{K}_0 :\ 0 \leq x < a,\ 0 \leq y < b\}, \qquad \forall a, b \in \mathbb{K}^+. \end{aligned}$$

(Si afferma che il prodotto su $\mathbb{K}^+$ e' univocamente determinato dal prodotto su $\mathbb{K}_0$; d'altro canto il prodotto su $\mathbb{K}$ e' univocamente determinato dal prodotto su $\mathbb{K}^+$, dunque effettivamente il prodotto su $\mathbb{K}$ e' univocamente determinato dal prodotto su $\mathbb{K}_0$.)

Esistenza e unicita' di un campo ordinato completo

Teorema 1. *Siano H e K due campi ordinati completi. Allora H e K sono fra loro isomorfi, tramite un unico isomorfismo.*

Riportiamo di seguito i passi principali di una dimostrazione.

- Esiste uno ed un solo isomorfismo di campi ordinati $f_0 : H_0 \to K_0$ fra i campi minimi H_0 e K_0 di H e K.

- Esiste al piu' una funzione $H \to K$ che sia isomorfismo di campi ordinati, specificamente

$$a \mapsto \sup\{f_0(x);\ x \in K_0,\ x < a\}, \qquad \forall a \in K.$$

- La posizione

$$a \mapsto \sup\{f_0(x);\ x \in K_0,\ x < a\}, \qquad \forall a \in K$$

definisce effettivamente una funzione $H \to K$ e questa funzione e' un isomorfismo di campi ordinati.

Teorema 2. *Esiste un campo ordinato completo.*

Riportiamo di seguito i passi principali di una versione della costruzione del campo ordinato completo mediante sezioni di Dedekind di $\mathbb{Q}$.

- Una sezione di $\mathbb{Q}$ e' una partizione di $\mathbb{Q}$ in due sottinsiemi separati tali che l'insieme superiore (quello contenente gli elementi maggiori) non abbia minimo (esplicitamente: una sezione di $\mathbb{Q}$ e' un insieme $\{A, B\}$ di due sottinsiemi non vuoti $A, B \subset \mathbb{Q}$ tali che $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, $a < b$ per ogni $a \in A$ ed ogni $b \in B$, e B non abbia minimo).

- Una sezione superiore di $\mathbb{Q}$ e' l'insieme superiore di una qualche sezione di $\mathbb{Q}$. (esplicitamente: una sezione superiore di $\mathbb{Q}$ e' un sottinsieme A di $\mathbb{Q}$ diverso da $\emptyset$ e da $\mathbb{Q}$ tale che per ogni $a \in A$ ed ogni $x \in \mathbb{Q}$ con $a < x$ si abbia $x \in A$ e per ogni $a \in A$ esiste un $a' \in A$ con $a' < a$). Indichiamo con $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$ l'insieme delle sezioni superiori di $\mathbb{Q}$.

- Sull'insieme $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$ si definisce una relazione $\preceq$ ponendo

$$A \preceq B \quad \text{se e solo se} \quad A \supseteq B, \qquad \forall A, B \in \mathcal{U}(\mathbb{Q}).$$

- Sull'insieme $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$ si definisce un'operazione $\oplus$ ponendo

$$A \oplus B = \{a + b;\ a \in A,\ b \in B\}, \qquad \forall A, B \in \mathcal{U}(\mathbb{Q});$$

si pone $\widehat{0} = \{x \in \mathbb{Q} :\ 0 < x\}$; per ogni $A \in \mathcal{U}(\mathbb{Q})$ si pone $\ominus A$ uguale al complementare di $-A = \{-a;\ a \in A\}$, privato del suo eventuale minimo.

- Sull'insieme $\mathcal{U}^+(\mathbb{Q})$ delle sezioni superiori maggiori-uguali a $\widehat{0}$ si definisce un'operazione $\odot$ ponendo

$$A \odot B = \{ab;\ a \in A,\ b \in B\}, \qquad \forall A, B \in \mathcal{U}^+(\mathbb{Q});$$

si pone $\widehat{1} = \{x \in \mathbb{Q} :\ 1 < x\}$; per ogni $\widehat{0} \neq A \in \mathcal{U}^+(\mathbb{Q})$ si pone $A^{\ominus 1}$ uguale al complementare in $\mathbb{Q}^+$ di $A^{-1} = \{a^{-1};\ a \in A\}$, privato del suo eventuale minimo.

- L'operazione $\odot$ su $\mathcal{U}^+(\mathbb{Q})$ si estende ad una operazione $\odot$ su $\mathcal{U}(\mathbb{Q})$.

- Si verifica che tutte queste definizioni sono ben poste e che $(\mathcal{U}(\mathbb{Q}); \oplus, \widehat{0}, \ominus; \odot, \widehat{1}, ^{\ominus 1}; \preceq)$ e' un campo ordinato completo.

Definizione 1. *L'unico campo ordinato completo si dice campo reale e si indica con* $\mathbb{R}$.