Elementi di Algebra da un punto di vista superiore;
Laurea Magistrale in Matematica; a.a. 2015-2016

Il riferimento principale delle lezioni e' il materiale per Elementi di Algebra d.p.v.s. 2014-2015 del Prof. Verardi, di seguito in breve EAV1415 (disponibile alla sua pagina web http://www.dm.unibo.it/ verardi/).

Registro

22, 24, 26 febbraio 2016

In queste lezioni si sono presentate le prime nozioni e proposizioni sull'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e la sua aritmetica a partire dagli assiomi di Peano; il riferimento principale e' EAV1415 cap. 3, pp. 40-49, in seconda battuta EAV1415 cap. 2, pp. 12-13 e 27).

Presentati gli assioni di Peano, la nozione di definizione ricorsiva e la nozione di dimostrazione per induzione (cap.3, p. 40); inizialmente non considerate le varianti che coinvolgono l'ordine. In modo naive, mostrati tre esempi di un insieme di numeri naturali: gli allineamenti finiti di tacche, le scritture decimali, le scritture binarie. Considerati i sistemi di Peano, ed enunciato che ogni due tali sistemi sono isomorfi mediante uno ed un solo isomorfismo (cap. 2, pp. 12-13 e 27).

Data una definizione ricorsiva dell'operazione di addizione, enunciate le prime proprieta' (prop. 3.1.1, dimostrando punti (a) e (b)), ulteriori proprieta' (prop. 3.1.2), definita l'operazione parziale di sottrazione, definita la relazione d'ordine totale naturale ed enunciate le sue prime proprieta'. Espresso parte di quanto detto affermando che $(N, +, 0)$ e' un monoide, regolare. Definito il numero 1 ed espressa in altra forma la funzione successivo.

Data una definizione ricorsiva dell'operazione di moltiplicazione. Enunciate le proprieta' distributive (prop. 3.1.3, (3), con dimostrazione di una delle due), le prime proprieta' (prop. 3.1.3, (1,2,4,5)), ulteriori proprieta' (prop. 3.1.3, (6,7) e prop. 3.1.4), definita l'operazione parziale di divisione, definita la relazione d'ordine parziale di divisibilita'. Introdotta la notazione N^+ per i naturali non nulli. Espresso parte di quanto detto affermando che $(N^+, ., 1)$ e' un monoide regolare.

Enunciata compatibilita' dell'ordine naturale con l'addizione e la moltiplicazione.

Enunciato il principio del minimo (prop. 3.1.5, con idea della dimostrazione).

Stabilita l'operazione di divisione con resto, o divisione euclidea (prop. 3.1.6, con idea della dimostrazione). Data la definizione di numero primo. Enunciato il lemma di Euclide; osservato che caratterizza i numeri primi; accennato al lemma di Bezout. Enunciato il teorema sull'infinita' dei numeri primi. Enunciato il teorema fondamentale dell'aritmetica (con idea della dimostrazione dell'unicita'). Definite le potenze. Data una seconda forma del teorema fondamentale.

29 febbraio, 02 e 04 marzo 2016

In queste lezioni si e' data una definizione di insieme finito e di cardinalita'; si sono stabilite proposizioni sulla cardinalita' e le prime operazioni e costruzioni insiemistiche; si sono enumerate funzioni, funzioni iniettive, permutazioni, sottinsiemi; si sono definiti e studiati i coefficienti binomiali; i riferimenti principali sono EAV1415 cap. 3.2, pp. 55-64, e il registro dettagliato della Lezione del 04.03.

Relazione di equipotenza fra insiemi; segmenti iniziali di $\mathbb{N}$; prop. sull'equipotenza di segmenti iniziali di $\mathbb{N}$; definizione di insieme finito e della sua cardinalita'; coincidenza fra equipotenza ed equicardinalita'.

Di seguito tutti gli insiemi sono tacitamente supposti finiti.

Unione disgiunta e addizione; inclusione e ordine. Th. sulla cardinalita' dell'unione di due insiemi disgiunti (con dimostrazione). Cor. (principio di addizione): sulla cardinalita' dell'unione di una famiglia finita di insiemi a due a due disgiunti. Cor. sulla cardinalita' dell'unione di due insiemi. Cor. sulla cardinalita' dei sottinsiemi propri. Cor. (principio dei cassetti) sulle partizioni di un insieme aventi cardinalita' minore della cardinalita' dell'insieme.

Prodotto cartesiano. Th. sulla cardinalita' del prodotto cartesiano di due insiemi (con dimostrazione). Cor. (principio di moltiplicazione) sulla cardinalita' del prodotto cartesiano di una famiglia finita di insiemi.

Funzioni. Th. sulla cardinalita' dell'insieme delle funzioni fra due dati insiemi (con dimostrazione).

Conteggio di funzioni, funzioni iniettive, permutazioni; fattoriali. Applicazione al problema dei compleanni.

Principio del pastore.

Sottinsiemi, coefficienti binomiali. Funzioni caratteristiche. Pr. sulla cardinalita' dell'insieme delle parti. Definizione del coefficiente binomiale $\binom{n}{k}$ come numero dei $k-$sottinsiemi di un $n-$insieme ($n, k \in \mathbb{N}$). Problema del contrabbandiere, impostazione della soluzione. Formula ricorsiva (con dimostrazione). Formula esplicita, due forme (con dimostrazioni). Tre modi equivalenti di trattare i coefficienti binomiali. Teorema binomiale (tre dimostrazioni).

07 marzo (per presentazioni scolastica e formale di $\mathbb{Z}$ cfr. reg. dett. Lez. 07.03)

Descritta una presentazione fine dell'anello $\mathbb{Z}$ degli interi relativi, da un testo per una media superiore.

Descritta una costruzione formale del gruppo $(\mathbb{Z};+)$ a partire dal monoide $(\mathbb{N};+)$; enunciato che si puo' estendere ad una costruzione dell'anello $(\mathbb{Z};+;\cdot)$ a partire dal semianello $(\mathbb{N};+;\cdot)$.

Definito ordine naturale su $\mathbb{Z}$, enunciata compatibilita' con operazioni; enunciate proprieta' del valore assoluto; enunciata proposizione su divisione con resto (due versioni); accennata versione per $\mathbb{Z}$ del teorema fondamentale dell'aritmetica.

09 marzo (cfr. reg. dett. Lez. 09.03)

Stabilita esistenza ed unicita' di omomorfismi di monoidi con dominio $(\mathbb{N};+,0)$ aventi assegnata immagine di 1; definiti multipli, o potenze, interi naturali di un elemento in un monoide. Definito monoide libero su un insieme mediante proprieta' universale; enunciata esistenza e unicita; dimostrata unicita'. Descritto $(\mathbb{N};+,0)$ come monoide libero sul suo elemento 1.

Stabilita esistenza ed unicita' di omomorfismi di gruppi con dominio $(\mathbb{Z};+,0;-)$ aventi assegnata immagine di 1; definiti multipli, o potenze, interi relativi di un elemento in un gruppo. Definito gruppo libero su un insieme mediante proprieta' universale; enunciata esistenza e unicita'. Descritto $(\mathbb{Z};+,0,-)$ come gruppo libero sul suo elemento 1.

Stabilita esistenza e unicita' di un omomorfismo dall'anello $\mathbb{Z}$ a ciascun anello; definito sottoanello fondamentale di un anello.

11 marzo (cfr. reg. dett. Lez. 11.03)

Ricordate relazioni di equivalenza su un insieme, partizioni di un insieme, corrispondenza fra le une e le altre, insiemi quoziente, proiezioni su insiemi quoziente.

Ricordati sottogruppi di un gruppo. Enunciato e provato che i sottogruppi del gruppo $(Z;+)$ sono tutti e soli i sottinsiemi del tipo $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ricordate per un gruppo abeliano nozioni di congruenza, relativi gruppo quoziente e omomorfismo di proiezione. Definito sottogruppo nucleo di una congruenza e descritte classi di congruenza come classi laterali. Descritta congruenza associata a un sottogruppo. Enunciato e provato che le congruenze del gruppo $(Z;+)$ sono tutti e sole le congruienza modulo un intero $n \in \mathbb{Z}^+$; descritto relativo gruppo quoziente $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Ricordati sottoanelli e ideali di un anello commutativo. Enunciato e provato che gli ideali dell'anello $(Z;+;\cdot)$ sono tutti e soli i sottinsiemi del tipo $n\mathbb{Z}$, con $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ricordate per un anello commutativo nozioni di congruenza, relativi anello quoziente e omomorfismo di proiezione. Definito ideale nucleo di una congruenza e descritte classi di congruenza come classi laterali. Descritta congruenza associata a un ideale.

Enunciato e provato che le congruenze dell'anello $(Z;+;\cdot)$ sono tutti e sole le congruenza modulo un intero $n \in \mathbb{Z}^+$; descritto relativo anello quoziente $\mathbb{Z}_n$. Mostrata applicazione, la regola del 9.