

III settimana, ripasso

1. Sia $A = (A; +, 0, -; \cdot, 1)$ un anello. Si provi che 0 e' un elemento assorbente per il prodotto, cioe' $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$ per ogni $a \in A$, e che vale la "regola dei segni", cioe' $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$ e $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$, per ogni $a, b \in A$.
2. Nella costruzione naive dell'anello degli interi relativi, quanti e quali significati assume il segno piu' $+$, e il segno meno $-$?

III settimana, esercizi

1. Esistono due anelli diversi $T = (\mathbb{Z}; +, 0, -; \top, t)$ e $U = (\mathbb{Z}; +, 0, -; \perp, u)$ che abbiano lo stesso insieme sostegno \mathbb{Z} e la stessa struttura additiva $(\mathbb{Z}; +, 0, -)$ del gruppo degli interi relativi?
2. Cosi' come si e' data la nozione di monoide libero su un insieme si da' la nozione di monoide commutativo libero su un insieme. Il monoide moltiplicativo $\mathbb{N}^+ = (\mathbb{N}^+, \cdot, 1)$ e' un monoide commutativo libero? E' un monoide libero?
3. Per l'anello \mathbb{Z} , provare la compatibilita' dell'ordine naturale con le operazioni.
4. Usando una proiezione dell'anello \mathbb{Z} su un anello di classi di resti, si dia una regola di verifica di calcoli diversa dalla regola del 9.

III settimana, completamento (fare almeno il primo)

1. Si consideri la costruzione di simmetrizzazione, che dato un monoide commutativo regolare fornisce una sua estensione ad un gruppo abeliano (cfr. EAV1415, Schede Integrative, Cap. 1, Par. 1.2), se ne dia una definizione mediante un proprieta' universale, e si verifichi che effettivamente la costruzione di simmetrizzazione soddisfa la proprieta' universale.
2. Si consideri la costruzione formale del gruppo additivo $(\mathbb{Z}; +, 0, -)$ dei numeri interi relativi a partire dal monoide additivo $(\mathbb{N}; +, 0)$ dei numeri naturali, e la si completi alla costruzione formale dell'anello $(\mathbb{Z}; +, 0, -; \cdot, 1)$ dei numeri interi relativi a partire dal semianello $(\mathbb{N}; +, 0; \cdot, 1)$ dei numeri naturali (e' chiesto di dare la costruzione, indicare quali verifiche vanno fatte, e farne qualcuna; non e' chiesto di fare tutte le verifiche).