

#### IV settimana, ripasso

1. Sia  $A$  un anello commutativo. Si provi che un elemento  $a \in A$  e' cancellabile (rispetto al prodotto) se e solo se  $a$  non e' un divisore dello zero.
2. Si provi che le seguenti relazioni d'equivalenza sull'insieme delle frazioni di interi (con denominatore non nullo) coincidono:

$$\frac{a_1}{b_1} \sim_1 \frac{a_2}{b_2} \quad \text{sse} \quad a_1 b_2 = b_1 a_2;$$
$$\frac{a_1}{b_1} \sim_2 \frac{a_2}{b_2} \quad \text{sse} \quad \exists \text{ interi } c_1, c_2 \neq 0 : \quad \frac{a_1 c_1}{b_1 c_1} = \frac{a_2 c_2}{b_2 c_2}.$$

3. Si provi in due modi, in uno dei quali usando meno teoria possibile, che l'equazione  $x^2 = 2$  non ha soluzioni in  $\mathbb{Q}$ .

#### IV settimana, esercizi

1. In un certo anno non bisestile che inizia con un lunedì', si ripete un certo evento a partire dal primo mercoledì' con cadenza regolare ogni dieci giorni. Quante volte questo evento accade di lunedì' nel corso dell'anno?
2. Per quali coppie di interi  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  esiste un omomorfismo di anelli da  $\mathbb{Z}_m$  a  $\mathbb{Z}_n$ ? Per tali coppie, quanti omomorfismi di anelli da  $\mathbb{Z}_m$  a  $\mathbb{Z}_n$  ci sono?
3. In quali passi della costruzione del campo delle frazioni di un dominio d'integrità'  $A$  si usa l'ipotesi che il monoide moltiplicativo ridotto  $A^* = A \setminus \{0\}$  sia regolare?
4. Si provi direttamente, senza fare riferimento al completamento di  $\mathbb{Q}$  ad  $\mathbb{R}$ , che nel campo ordinato  $\mathbb{Q}$  il sottinsieme limitato  $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$  non ha estremo superiore.