

IV settimana, ripasso

1. Sia A un anello commutativo. Si provi che un elemento $a \in A$ e' cancellabile (rispetto al prodotto) se e solo se a non e' un divisore dello zero.
2. Si provi che le seguenti relazioni d'equivalenza sull'insieme delle frazioni di interi (con denominatore non nullo) coincidono:

$$\frac{a_1}{b_1} \sim_1 \frac{a_2}{b_2} \quad \text{sse} \quad a_1 b_2 = b_1 a_2;$$
$$\frac{a_1}{b_1} \sim_2 \frac{a_2}{b_2} \quad \text{sse} \quad \exists \text{ interi } c_1, c_2 \neq 0 : \quad \frac{a_1 c_1}{b_1 c_1} = \frac{a_2 c_2}{b_2 c_2}.$$

3. Si provi in due modi, in uno dei quali usando meno teoria possibile, che l'equazione $x^2 = 2$ non ha soluzioni in \mathbb{Q} .

IV settimana, esercizi

1. In un certo anno non bisestile che inizia con un lunedì', si ripete un certo evento a partire dal primo mercoledì' con cadenza regolare ogni dieci giorni. Quante volte questo evento accade di lunedì' nel corso dell'anno?
2. Per quali coppie di interi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ esiste un omomorfismo di anelli da \mathbb{Z}_m a \mathbb{Z}_n ? Per tali coppie, quanti omomorfismi di anelli da \mathbb{Z}_m a \mathbb{Z}_n ci sono?
3. In quali passi della costruzione del campo delle frazioni di un dominio d'integrità' A si usa l'ipotesi che il monoide moltiplicativo ridotto $A^* = A \setminus \{0\}$ sia regolare?
4. Si provi direttamente, senza fare riferimento al completamento di \mathbb{Q} ad \mathbb{R} , che nel campo ordinato \mathbb{Q} il sottinsieme limitato $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ non ha estremo superiore.