V settimana, ripasso

1. Si provi che se A e' un anello commutativo, $p = p(x)$ e' un polinomio in $A[x]$ e $c \in A$ e' una radice di p, allora $p(x)$ e' divisibile per $x - c$.
2. Si provi che se A e' un domino d'integrita', allora ogni polinomio $p(x) \in A[x]$ di grado $n \geq 0$ puo' avere in A al piu' n radici distinte.
3. Si dia un esempio di un polinomio su un anello non dominio d'integrita' che in tale anello ha piu' radici del suo grado.

IV settimana, esercizi

1. Si determinino tutti gli automorfismi della $\mathbb{Q}-$algebra $\mathbb{Q}[x]$.
2. In $\mathbb{Z}[x]$ siano p un numero primo e $g(x)$ ed $h(x)$ due polinomi non costanti. Usando il morfismo canonico $\mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ si provi che se p divide il prodotto $g(x)h(x)$ allora p divide almeno uno fra $g(x)$ ed $h(x)$.
3. Si consideri l'anello $\mathbb{Q}[x]$ e in esso il polinomio irriducibile $f(x) = x^2 - 2$. Si descriva esplicitamente il campo quoziente $\mathbb{Q}[x]/(f(x))$ (una $\mathbb{Q}-$base, formule per l'addizione, la moltiplicazione e l'inversione, in funzione delle relative coordinate).
4. Si determini l'inversa della serie formale $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ nell'anello delle serie formali $\mathbb{Q}[[x]]$.
5. Sia $(g_n)_0^{+\infty}$ la successione definita per ricorrenza da $g_0 = 2$, $g_1 = 3$, $g_{n+2} = 5g_n + 7g_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) e sia $G = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n x^n$ la corrispondente funzione generatrice in $\mathbb{Q}[[x]]$. Si dia se possibile una rappresentazione di G come quoziente di due polinomi in $\mathbb{Q}[[x]]$.