VIII settimana, ripasso

1. Si provi che in $\mathbb{R}[x]$ un polinomio e' irriducibile se e solo se e' di II grado con discriminante negativo.
2. Si provi che un numero complesso e' numero algebrico se e solo se la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono numeri algebrici.
3. Si calcolino le radici quadrate di $z = 1 + \sqrt{3}i$.
4. Si dia una formula per la parte reale e la parte immaginaria delle radici quadrate di un numero complesso z in funzione della parte reale ed immaginaria di z.
5. Si calcolino le radici quadrate di $z = 3 + 4i$.

VIII settimana, esercizi (L'importante non e' farli tutti, ma farne bene qualcuno)

1. Siano a e b numeri razionali positivi e siano $\alpha = \sqrt{a}$ e $\beta = \sqrt{b}$. Sotto quali condizioni l'estensione $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)/\mathbb{Q}$ ha grado 4? Sotto tali condizioni si determini il polinomio minimo di $\gamma = \alpha + \beta$ e si dica se $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\gamma)$.
2. Sia F/K un'estensione quadratica fra sottocampi di $\mathbb{C}$. Si e' visto che esistono degli elementi di F che non stanno in K ma il cui quadrato sta in K. Indicati con α uno di tali elementi di F e con a il suo quadrato, si descrivano tutti gli altri elementi di F con questa proprieta' e i loro quadrati.
3. Sia F il campo di spezzamento del polinomio $f(x) = (x^2 - 5)(x^2 - 7)$ su $\mathbb{Q}$. Si determinino il gruppo di Galois $\mathcal{G}(F/\mathbb{Q})$ del polinomio $f(x)$ su $\mathbb{Q}$ e si descrivano esplicitamente i campi intermedi tra $\mathbb{Q}$ ed F.
4. Si determini il gruppo di Galois del polinomio $x^5 - 1$ su $\mathbb{Q}$ e si descrivano esplicitamente i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ ed il campo di spezzamento di $x^5 - 1$ (suggerimento: si usi solo il fatto che le radici quinte dell'unita' formano un gruppo ciclico di ordine 5).
5. Si descrivano esplicitamente i campi intermedi fra $\mathbb{Q}$ ed il campo di spezzamento di $x^3 - 2$ (Completamento dell'esempio considerato nella lezione del 22.04).
6. Fissato nel piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico, si considerino la circonferenza di raggio 2 con centro nell'origine, le rette che hanno pendenza 2 ed intercettano il secondo asse in punti a coordinate intere, e i punti di intersezione della circonferenza con queste rette. Sia F il sottocampo di $\mathbb{R}$ generato dalle coordinate di questi punti. Si determini il grado di F su $\mathbb{Q}$.