Elementi di algebra da un punto di vista superiore. AA. 15-16

Esame del 30.05.16. Parte scritta: uno dei seguenti esercizi.

1- Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Usando solo il principio di induzione ed il principio di minimo, si provi che

- se A e' superiormente limitato, allora A e' equipotente a un segmento iniziale di $\mathbb{N}$;

- se A non e' superiormente limitato, allora A e' equipotente ad $\mathbb{N}$.

2- Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia a_n il numero dei sottinsiemi dell'insieme $I_n = \{i \in \mathbb{N} : \ 0 < i \leq n\}$ che non contengono alcuna coppia di elementi consecutivi. Si determini una formula ricorsiva per la succesione (a_n), e la si verifichi per i primi tre valori di n. Indicata con $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la serie formale in $\mathbb{Q}[[x]]$ associata alla succesione (a_n), si determini se possibile una rappresentazione di A come quoziente di due polinomi.

3- Siano $\mathbb{K}$ un campo e $f(x), g(x)$ polinomi in $\mathbb{K}[x]$. Si determinino condizioni necessarie o sufficienti su $f(x)$ e $g(x)$ tali che esista un endomorfismo di $\mathbb{K}-$algebra di $\mathbb{K}[x]$ che mandi $f(x)$ in $g(x)$.

4- Sia $f(x) = x^2 + px + q$ in $\mathbb{Q}[x]$, con p, q parametri. Si determinino la condizione sui valori di p, q per la quale l'anello quoziente $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[x]/(f(x))$ e' un campo. Sotto tale condizione, si diano per $\mathbb{F}$ una $\mathbb{Q}-$base e formule per le operazioni di addizione, moltipicazione e inversione in funzione delle coordinate rispetto a tale base.