Corso di Laurea in Ingegneria Gestionale, Canale L-Z
Corso di GEOMETRIA E ALGEBRA. Docenti: Prof. Cantarini, Regonati
Bologna 31 dicembre 2012 - Esempio di I appello

Tempo: 2h per la prova totale; 1h per la II prova parziale (Esercizi 3 e 4)

Esercizio 1.(10 punti) Si consideri il sottoinsieme $S = (1,1,1) + \langle(1,-1,1),(1,1,2)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$.

1. Stabilire se S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
2. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 4 incognite avente S come insieme di soluzioni.
3. Determinare, se possibile, un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite avente S come insieme di soluzioni.
4. Determinare, se possibile, due diversi sistemi lineari aventi S come insieme di soluzioni.
5. Interpretare geometricamente l'insieme S.

Esercizio 2.(6 punti) Si consideri il seguente sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ al variare di $t \in \mathbb{R}$:

$$A_t = \langle(1,t,0,0),(1,1,0,t),(2,1+t,t,1+t),(2,2,t,2+t)\rangle.$$

1. Determinare, al variare di $t \in \mathbb{R}$, la dimensione di A_t ed una sua base $\mathcal{B}_t$;
2. Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1,1,1,1)$ appartiene ad A_t e per uno dei valori trovati, calcolare le coordinate di v rispetto alla base $\mathcal{B}_t$.

Esercizio 3.(8 punti) Per ciascuna delle seguenti matrici, dire se è diagonalizzabile; in caso affermativo, diagonalizzarla e verificare la correttezza del risultato.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4.(8 punti) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

si determini la proiezione ortogonale $\mathrm{pr}_V(x)$ del generico vettore $x = [x_i]_{i=1}^3$ sul piano V generato da a_1 e a_2. La funzione $f = \mathrm{pr}_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e' lineare; si determini la matrice $M(f)$ che la rappresenta.