Esercizi III

Priima di dare la risoluzione dei seguenti esercizi su autovettori, autovalori, diagonalizzabilità e diagonalizzazione, ricordiamo alcune definizioni, teoremi e fatti su questo argomento. Sia A una matrice quadrata di ordine n, ad entrate reali.

- Caratterizzazione degli autovalori (cfr. Lez. VII, punto 2). Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$ di A.

- Definzione di autospazio (cfr. Lez. VII, punto 4). L'autospazio V_μ di A con autovalore associato μ è l'insieme degli autovettori di A con autovalore associato μ, più il vettore nullo 0_n, cioè l'insieme delle soluzioni di

$$Ax = \mu x, \quad \text{o} \quad (A - \mu I)x = 0_n$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^n$. V_μ un sottospazio di $\mathbb{R}^n$, di dimensione

$$\dim(V_\mu) = n - r(A - \mu I).$$

- Definizione di matrice diagonalizzabile, diagonalizzazione (cfr. Lez. VII, Def. 1). A si dice diagonalizzabile se esistono una matrice diagonale D ed una matrice invertibile P, quadrate di ordine n, tali che $A = PDP^{-1}$; diagonalizzare A significa determinare D e P.

- Teorema su autovettori, autovalori e diagonalizzazione (cfr. Lez. VII, Th. 1). A e' diagonalizzabile se e solo se A possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$; se $v_1, \ldots, v_n$ sono tali autovettori e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sono gli autovalori associati, allora $A = PDP^{-1}$, dove $P = [v_1, \ \ldots, \ v_n]$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \vdots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

- Teorema su matrici con autovalori distinti (cfr. Lez. VIII, Th. 2). Se A possiede n autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, e $v_1, \ldots, v_n$ sono autovettori corrispondenti, allora $v_1, \ldots, v_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$; in particolare, A è diagonalizzabile.

- Definizione, molteplicità algebrica e geometrica (cfr. Lez. VIII, Def. 1). Sia μ un autovalore di A; la molteplicità algebrica $m_a(\mu)$ è la molteplicità di μ come radice del polinomio caratteristico di A; la molteplicità geometrica $m_g(\mu)$ è la dimensione dell'autospazio V_μ associato a μ. Si ha

$$m_g(\mu) = \mathrm{dim} V_\mu = n - r(A - \mu I).$$

- Relazione fra molteplicità geometrica e algebrica (cfr. Lez. VIII, Th. 3). Per ogni autovalore μ di A si ha $m_g(\mu) \leq m_a(\mu)$. Osservazione: essendo $1 \leq m_g(\mu)$, se $m_a(\mu) = 1$ allora $m_g(\mu) = m_a(\mu) = 1$.

- Teorema, caratterizzazione della diagonalizzabilità (cfr. Lez. VIII, Th. 4). A possiede n autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se sono soddisfatte entrambe le condizioni:

  il polinomio caratteristico di A si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$;

  per ogni autovalore di A, le molteplicità geometrica e algebrica sono uguali.

  Dalla dimostrazione del teorema si ha inoltre che sotto queste condizioni, prendendo un insieme base per ciascun autospazio, e unendo questi insiemi si ottiene un insieme di n autovettori di A che è una base di $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 1

Diagonalizzare la seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determinare i valori del parametro reale k per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 4 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Il suo polinomio caratteristico è:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6;$$

gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0;$$

queste soluziioni sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.
La matrice A quadrata di ordine due ha i due autovalori distinti 2 e 3, dunque se v_1 e v_2 sono due autovettori di A corrispondenti agli autovalori 2 e 3, allora v_1 e v_2 formano

una base di $\mathbb{R}^2$; ciò equivale a dire che A è diagonalizzabile: la matrice $P = [v_1, v_2]$ è invertibile, e

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore 2 sono le soluzioni non banali del sistema

$$(A - 2I)x = 0_2, \text{ cioè } \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che equivale all'unica equazione $-x_1 + 2x_2 = 0$. Una soluzione non banale è $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Gli autovettori corrispondenti all'autovalore 3 sono le soluzioni non banali del sistema

$$(A - 3I)x = 0_2, \text{ cioè } \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

che equivale all'unica equazione $-x_1 + x_2 = 0$. Una soluzione non banale è $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
In definitiva, si ha

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{dove} \quad P = [v_1,\ v_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la matrice

$$A_k = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ k & 4 \end{bmatrix},$$

dove k è un parametro reale. Il suo polinomio caratteristico è:

$$\det(A_k - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ k & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 2k + 4;$$

gli autovalori di A_k sono le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\det(A_k - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda - 2k + 4 = 0.$$

La matrice A_k è diagonalizzabile solo se il suo polinomio caratteristico si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$; ciò capita se e solo se

$$\Delta = 9 + 8k \geq 0, \quad \text{cioè} \quad k \geq -\frac{9}{8}.$$

Per $k > -\frac{9}{8}$, la matrice A_k ha due autovalori distinti, dunque A_k è diagonalizzabile.

Per $k = -\frac{9}{8}$, la matrice A_k ha un solo autovalore $\lambda = \frac{5}{2}$, con $m_a\left(\frac{5}{2}\right) = 2$. Si ha

$$m_g\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - r\left(A_k - \frac{5}{2}I\right), \qquad \left(k = -\frac{9}{8}\right).$$

La matrice

$$A_k - \frac{5}{2}I = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ -\frac{9}{8} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \qquad \left(k = -\frac{9}{8}\right)$$

ha rango 1. Dunque

$$m_g\left(\frac{5}{2}\right) = 2 - 1 = 1 < m_a\left(\frac{5}{2}\right) = 2.$$

In questo caso la matrice A_k non è digonalizzabile.

In definitiva: la matrice A_k è diagonalizzabile se e solo se $k > -\frac{9}{8}$.

Esercizio 2

Per ciascuna delle seguenti matrici, dire se è diagonalizzabile e, in caso affermativo, diagonalizzarla.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Indichiamo con A_i per $i = 1, 2, 3, 4$ le quattro matrici scritte sopra. Prima individuiamo fra le matrici A_i quelle che sono diagonalizzabili, poi di queste effettueremo la diagonalizzazione.

1. Consideriamo la matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è

$$\det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = 1 - \lambda^3 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1);$$

il polinomio non è ulteriormente scomponibile in quanto il $\Delta = 1 - 4 = -3$ del secondo fattore è negativo; dunque A_1 non è diagonalizzabile.

2. Passiamo ad
$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix};$$
il suo polinomio caratteristico è
$$\det(A_2 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$
Il polinomio caratteristico di A_2 e' completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$, la matrice A_2 ha due autovalori: $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $m_a(1) = 2$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica $m_a(-1) = 1$.

Consideriamo l'autovalore 1. La sua molteplicità geometrica è
$$m_g(1) = \dim V_1 = 3 - r\,(A_2 - I)\,;$$
si ha
$$r\,(A_2 - I) = r \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 1;$$
dunque
$$m_g(1) = 3 - 1 = 2 = m_a(1).$$
Consideriamo l'autovalore -1; si ha
$$m_g(-1) = m_a(-1) = 1.$$
Abbiamo visto che il polinomio caratteristico di A_2 si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$, e per ciascuno dei due autovalori di A, la molteplicità algebrica è uguale alla molteplicità geometrica; possiamo allora affermare che la matrice A_2 possiede 3 autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^3$. Ciò equivale a dire che A_2 è diagonalizzabile.

3. Vediamo
$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix};$$
il suo polinomio caratteristico è
$$\det(A_3 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda + 1)^2.$$

Il polinomio caratteristico di A_3 e' completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$, la matrice A_3 ha due autovalori: $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $m_a(0) = 1$ e $\lambda_2 = -1$ con molteplicità algebrica $m_a(-1) = 2$.

Consideriamo l'autovalore 0; si ha

$$m_g(0) = m_a(0) = 1.$$

Consideriamo l'autovalore -1. La sua molteplicità geometrica è

$$m_g(-1) = \dim V_{-1} = 3 - r\left(A_3 + I\right);$$

si ha

$$r\left(A_3 + I\right) = r \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2;$$

dunque

$$m_g(-1) = 3 - 2 = 1 < m_a(-1) = 2.$$

Abbiamo visto che il polinomio caratteristico di A_3 si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$, ma c'è un autovalore di A_3 per il quale la molteplicità geometrica è strettamente minore alla molteplicità algebrica; possiamo allora affermare che la matrice A_3 non possiede 3 autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^3$. Ciò equivale a dire che A_3 non è diagonalizzabile.

4. Consideriamo infine la matrice

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix};$$

il suo polinomio caratteristico è

$$\det(A_4 - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -4 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda - 4 = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Il polinomio caratteristico di A_3 e' completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$, la matrice A_3 ha tre autovalori distinti: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = -2$. Possiamo allora concludere che A_4 possiede 3 autovettori che formano una base di $\mathbb{R}^3$. Dunque A_4 è diagonalizzabile.

Ora diagonalizziamo le matrici A_2 e A_4.

- Effettuiamo la diagonalizzazione di

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 1$ con $m_g(1) = m_a(1) = 2$, e $\lambda_2 = -1$ con $m_g(-1) = m_a(-1) = 1$.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_1 = 1$ e il corrispondente autospazio V_1, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A_2 - I)x = 0_3, \text{ cioè } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} x = 0_3$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^3$; questo sistema consiste di un'unica equazione:

$$x_2 - x_3 = 0;$$

le soluzioni sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} s \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Osserviamo che i vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

formano una base di V_1.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_2 = -1$ e il corrispondente autospazio V_{-1}, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A_2 + I)x = 0_3, \text{ cioè } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = 0_3$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^3$; questo sistema consiste di due equazioni:

$$2x_1 = 0, \quad x_2 + x_3 = 0;$$

le soluzioni sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Il vettore

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forma una base di V_{-1}.

I vettori v_1, v_2, che formano una base dell'autospazio V_1, e il vettore v_3, che forma una base dell'autospazio V_{-1}, nel loro complesso formano una base di $\mathbb{R}^3$; la matrice

$$P = [v_1,\ v_2,\ v_3]$$

e' invertibile, e

$$A_2 = PDP^{-1},$$

dove D e' la matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- Effettuiamo la diagonalizzazione di

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, e $\lambda_3 = -2$.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_1 = 1$ e il corrispondente autospazio V_1, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A_4 - I)x = 0_3, \text{ cioè } \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} x = 0_3$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^3$; questo sistema consiste di due equazioni indipendenti:

$$-x_1 + x_2 = 0, \quad -x_2 + x_3 = 0;$$

le soluzioni sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Il vettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

forma una base di V_1.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_2 = 2$ e il corrispondente autospazio V_2, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A_4 - 2I)x = 0_3, \text{ cioè } \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{bmatrix} x = 0_3$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^3$; questo sistema consiste di due equazioni indipendenti:

$$-2x_1 + x_2 = 0, \quad -2x_2 + x_3 = 0;$$

le soluzioni sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} \frac{t}{4} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Il vettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

forma una base di V_2.

Consideriamo l'autovalore $\lambda_3 = -2$ e il corrispondente autospazio V_{-2}, cioè l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$(A_4 + 2I)x = 0_3, \text{ cioè } \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix} x = 0_3$$

nell'incognita $x \in \mathbb{R}^3$; questo sistema consiste di due equazioni indipendenti:

$$2x_1 + x_2 = 0, \quad 2x_2 + x_3 = 0;$$

le soluzioni sono del tipo

$$x = \begin{bmatrix} \frac{t}{4} \\ -\frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t, \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Il vettore

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

forma una base di V_{-2}.

Gli autovettori v_1, v_2, v_3, corrispondenti agli autovalori $1, 2, -2$, formano una base di $\mathbb{R}^3$; la matrice

$$P = [v_1,\ v_2,\ v_3]$$

e' invertibile, e

$$A_4 = PDP^{-1},$$

dove D e' la matrice diagonale

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 4

Discutere la diagonalizzabilità della seguente matrice, al variare dei parametri reali a, b, c, d, e, f:

$$\begin{bmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

Soluzione

Indicheremo la matrice con A. Il suo polinomio caratteristico è:

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c);$$

questo polinomio si fattorizza completamente su $\mathbb{R}$, gli autovalori di A sono a, b, c. Analizziamo i possibili casi concernenti a, b, c.

i) a, b, c distinti; in questo caso A è diagonalizzabile;

ii) $a = b$ e $a \neq c$; in questo caso A ha un autovalore a con molteplicità algebrica $m_a(a) = 2$, e un autovalore c con molteplicità algebrica $m_a(c) = 1$. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se per ciascuno dei suoi due autovalori la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica:

$$m_g(a) = 2 \quad \text{e} \quad m_g(c) = 1.$$

Consideriamo l'autovalore a; si ha

$$m_g(a) = \dim V_a = 3 - r(A - aI);$$

dunque la condizione $m_g(a) = 2$ vale se e solo se

$$r(A - aI) = 1.$$

Si ha

$$A - aI = \begin{bmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & c - a \end{bmatrix},$$

dove $c - a \neq 0$; dunque la condizione $r(A - aI) = 1$ vale se e solo se

$$d = 0.$$

Consideriamo l'autovalore c; si ha $m_g(c) = m_a(c) = 1$.

In definitiva: nel caso in esame $a = b$ e $a \neq c$, la matrice A è diagonalizzabile se e solo se

$$d = 0;$$

in altri termini, se e solo se A è del tipo

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & f \\ 0 & a & e \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}.$$

iii) caso $a = c$ e $a \neq b$; lasciato per esercizio al lettore;

iv) caso $b = c$ e $a \neq b$; lasciato per esercizio al lettore;

v) caso $a = b = c$; in questo caso A ha un autovalore a con molteplicità algebrica $m_a(a) = 3$. La matrice A è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica di a coincide con la sua molteplicità algebrica:

$$m_g(a) = 3.$$

Si ha
$$m_g(a) = \dim V_a = 3 - r(A - aI);$$
dunque la condizione $m_g(a) = 3$ vale se e solo se
$$r(A - aI) = 0.$$
Si ha
$$A - aI = \begin{bmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
dunque la condizione $r(A - aI) = 0$ vale se e solo se
$$d = e = f = 0.$$
In definitiva: nel caso in esame $a = b = c$, la matrice A è diagonalizzabile se e solo se
$$d = e = f = 0;$$
in altri termini, se e solo se A è del tipo
$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

Esercizi V

Esercizio 1

Per ciascuna delle seguenti funzioni lineari $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si scriva la matrice che la rappresenta:

i) la proiezione ortogonale sulla bisettrice del II e IV quadrante;

ii) la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante;

iii) la rotazione di un angolo retto in senso antiorario attorno all'origine.

Prima di dare la soluzione, ricordiamo che la matrice che rappresenta una funzione lineare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è la matrice $M(f) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definita implicitamente da
$$f(x) = M(f)\ x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n;$$
equivalentemente, la matrice $M(f)$ e' data esplicitamente da
$$M(f) = [f(e_1),\ \ldots,\ f(e_n)],$$
dove $e_1, \ldots, e_n$ sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione

i) Sia l la bisettrice del II e IV quadrante, e sia $\text{pr}_l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la funzione proiezione ortogonale sulla retta l. Si ha

$$\text{pr}_l(x) = a\frac{a \cdot x}{a \cdot a}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

dove a e' un qualsiasi vettore non nullo di l, ad esempio $a = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ci sono due modi per risolvere l'esercizio.

Primo modo. Posto $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ si ha

$$\text{pr}_l(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{-x_1 + x_2}{2} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che

$$\begin{bmatrix} \frac{x_1 - x_2}{2} \\ \frac{-x_1 + x_2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$\text{pr}_l(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

cosi'

$$M(\text{pr}_l) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Secondo modo. Si ha

$$M(\text{pr}_\text{l}) = [\text{pr}_l(e_1),\ \text{pr}_l(e_2)],$$

dove e_1 ed e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Ora

$$\text{pr}_l(e_1) = a\frac{a \cdot e_1}{a \cdot a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{-1}{2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$\text{pr}_l(e_2) = a\frac{a \cdot e_2}{a \cdot a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

cosi'

$$M(\text{pr}_\text{l}) = [\text{pr}_l(e_1),\ \text{pr}_l(e_2)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

ii) Sia $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la simmetria rispetto alla bisettrice del I e III quadrante. Ci sono due modi per risolvere l'esercizio.

Primo modo. Si ha

$$M(s) = [s(e_1),\ s(e_2)]\,,$$

dove e_1 ed e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Ora

$$s(e_1) = e_2, \quad s(e_2) = e_1,$$

cosi'

$$M(s) = [s(e_1),\ s(e_2)] = [e_2,\ e_1] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Secondo modo. Si ha

$$s(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \forall \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Dunque

$$s(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

cosi'

$$M(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

iii) Sia $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotazione di un angolo retto in senso antiorario attorno all'origine. Si ha

$$M(r) = [r(e_1),\ r(e_2)]\,,$$

dove e_1 ed e_2 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^2$. Ora

$$r(e_1) = e_2, \quad r(e_2) = -e_1,$$

cosi'

$$M(r) = [r(e_1),\ r(e_2)] = [e_2,\ -e_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2

Siano $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la corrispondente funzione lineare. Si determini una base $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A.

Si determini la matrice $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathfrak{V}$.

Soluzione

La matrice A ha polinomio caratteristico

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 5),$$

e dunque ha autovalori $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 5$. Poichè la matrice A quadrata di ordine due ha due autovalori distinti, prendendo per ciascuno dei due autovalori un autovettore corrispondente, si ha una base di $\mathbb{R}^2$.
Gli autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda_1 = 2$ sono le soluzioni non banali del sistema lineare omogeneo

$$(A - 2I)\,x = 0_2, \text{ cioè } \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ cioè } 2x_1 + x_2 = 0;$$

una soluzione non banale è

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Gli autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda_2 = 5$ sono le soluzioni non banali del sistema lineare omogeneo

$$(A - 5I)\,x = 0_2, \text{ cioè } \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ cioè } -x_1 + x_2 = 0;$$

una soluzione non banale è

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dunque $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A.
Alla matrice A corrisponde la funzione lineare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x) = Ax, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2.$$

La matrice $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f)$ che rappresenta f rispetto alla base $\mathfrak{V}$ è data esplicitamente da

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f) = \left[[f(v_1)]_{\mathfrak{v}},\ [f(v_2)]_{\mathfrak{v}} \right].$$

Ora,

$$f(v_1) = Av_1 = 2v_1, \quad f(v_2) = Av_2 = 5v_2$$

così

$$M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{v}}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3

Siano V e W due spazi vettoriali di dimensione 3 e 2 e siano $\mathfrak{V} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathfrak{W} = \{w_1, w_2\}$ loro basi. Sia $f : V \to W$ la funzione lineare rappresentata rispetto alle basi $\mathfrak{V}$ e $\mathfrak{W}$ dalla matrice:

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Come agisce f sul generico elemento di V?

Prima di dare la soluzione, ricordiamo che la matrice che rappresenta una funzione lineare $f : V \to W$ fra due spazi vettoriali V e W, rispetto a una base $\mathfrak{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V e a una base $\mathfrak{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ di W, è la matrice $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definita implicitamente da

$$[f(x)]_{\mathfrak{w}} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f)\ [x]_{\mathfrak{v}}, \qquad \forall x \in V;$$

equivalentemente, la matrice $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f)$ e' data esplicitamente da

$$M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f) = [[f(v_1)]_{\mathfrak{w}}\,,\ \dots,\ [f(v_n)]_{\mathfrak{w}}]\,.$$

Qui $[\ ]_{\mathfrak{v}} : V \to \mathbb{R}^n$ e' la funzione coordinata rispetto alla base $\mathfrak{V}$ di V, e $[\ ]_{\mathfrak{w}} : W \to \mathbb{R}^m$ e' la funzione coordinata rispetto alla base $\mathfrak{W}$ di W.

Soluzione

Ci sono due modi per risolvere l'esercizio.
Primo modo. Per ogni vettore $x \in V$ si ha

$$[f(x)]_{\mathfrak{w}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} [x]_{\mathfrak{v}};$$

dunque, posto

$$x = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3 \qquad (x_i \in \mathbb{R}),$$

si ha

$$[f(x)]_{\mathfrak{w}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{bmatrix},$$

cioe'

$$f(x) = w_1(x_1 + 2x_3) + w_2(x_2 + 3x_3).$$

Secondo modo Si ha

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f) = [[f(v_1)]_{\mathfrak{w}}\,,\ [f(v_2)]_{\mathfrak{w}}\,,\ [f(v_3)]_{\mathfrak{w}}]\,,$$

cosi'

$$f(v_1) = w_1 1 + w_2 0 = w_1, \quad f(v_2) = w_1 0 + w_2 1 = w_2, \quad f(v_3) = w_1 2 + w_2 3.$$

Per ogni $x \in V$, posto

$$x = v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3, \qquad (x_i \in \mathbb{R}),$$

si ha

$$\begin{aligned} f(x) &= f(v_1)x_1 + f(v_2)x_2 + f(v_3)x_3 \\ &= w_1 x_1 + w_2 x_2 + (w_1 2 + w_2 3)x_3 \\ &= w_1(x_1 + 2x_3) + w_2(x_2 + 3x_3). \end{aligned}$$