# Esercizi IV

## Esercizio 3

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix};$$

si determini la proiezione ortogonale $p$ di $b$ sul piano $V$ generato da $a_1$ e $a_2$; con quali scalari bisogna combinare linearmente $a_1$ e $a_2$ per ottenere $p$?

## Soluzione

I vettori $a_1$ e $a_2$ sono linearmente indipendenti; il piano $V$ generato dai vettori $a_1$ e $a_2$ e' l'insieme delle combinazioni linerari

$$a_1 r_1 + a_2 r_2 = Ar$$

dove $A = [a_1,\ a_2]$, e $r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$ varia in $\mathbb{R}^2$.

La proiezione ortogonale $p$ del vettore $b$ sul piano $V$ e' data da

$$p = a_1 r_1 + a_2 r_2 = Ar, \quad \text{dove} \quad r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b.$$

Calcoliamo dunque:

$$(A^T A)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$A^T b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix},$$

$$r = \left(A^T A\right)^{-1} A^T b = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

La proiezione ortogonale $p$ di $b$ su $V$ e'

$$p = Ar = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Gli scalari con i quali dobbiamo combinare linearmente $a_1$ e $a_2$ per ottenere la proiezione ortogonale $p$ di $b$ su $V$ sono le componenti del vettore $r$ :

$$p = -\frac{4}{3} a_1 - \frac{1}{3} a_2.$$

## Esercizio 4

Nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$ sono dati i vettori:

$$a_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

l'insieme $\{a_1, a_2\}$ e' una base di $\mathbb{R}^2$, e' ortonormale? Si determinino le coordinate del vettore $b$ rispetto a questa base.

## Soluzione

I vettori $a_1$ e $a_2$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ se e solo se sono versori fra loro ortogonali:

$$\|a_1\| = 1, \quad a_1 \cdot a_2 = 0, \quad \|a_2\| = 1.$$

Calcoliamo:

$$\|a_1\| = \sqrt{a_1 \cdot a_1} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1,$$

$$a_1 \cdot a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0.$$

$$\|a_2\| = \sqrt{a_2 \cdot a_2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1.$$

Quindi $a_1$ e $a_2$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$. Le coordinate di $b$ rispetto alla base ortonormale $a_1, a_2$ sono date dai prodotti scalari

$$b \cdot a_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$b \cdot a_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.$$

## Esercizio 5

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori:

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

fra loro ortogonali; si determini un vettore $a_3$ non nullo ortogonale ad $a_1$ e $a_2$; moltiplicando per opportuni scalari, si normalizzino i vettori $a_1, a_2, a_3$ in modo da ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.

## Soluzione

I vettori $x = [x_i]_{i=1}^3$ ortogonali ad $a_1$ e $a_2$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_1 \cdot x = 0 \\ a_2 \cdot x = 0 \end{cases} \quad \text{cioe'} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha infinite soluzioni, del tipo

$$x = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} \\ t \end{bmatrix}, \quad \text{dove } t \text{ varia in } \mathbb{R}; \quad \text{scegliamo} \quad a_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dunque i tre vettori $a_1, a_2, a_3$ sono nonon nulli e a due a due ortogonali. Per ottenere una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ sara' sufficiente normalizzare. Calcoliamo le norme dei vettori:

$$\|a_1\| = \sqrt{3}, \ \ \|a_2\| = \sqrt{2}, \ \ \|a_3\| = 2,$$

e moltiplichiamo ciascun vettore per l'inverso della sua norma:

$$a^*{}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} a_1, \ \ a^*{}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_2, \ \ a^*{}_3 = \frac{1}{2} a_3.$$

I vettori $a^*{}_1, a^*{}_2, a^*{}_3$ formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$.